А. Г. Мерзляк
Д. А. Номіровський
В. Б. Полонський
М. С. Якір

# АЛГЕБРА
# І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

## ПОЧАТОК ВИВЧЕННЯ НА ПОГЛИБЛЕНОМУ РІВНІ З 8 КЛАСУ

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ

підручник для 10 класу
закладів загальної середньої освіти

Харків
«Гімназія»
2018

УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 517.1]
М52

**Мерзляк А. Г.**

М52 Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглибл. рівні, проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2018. — 512 с. : іл.

ISBN 978-966-474-313-3.

**УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 517.1]**



ISBN 978-966-474-313-3

# Від авторів

### Любі десятикласники та десятикласниці!

Ви починаєте вивчати новий шкільний предмет — **алгебру і початки аналізу**.

Цей предмет надзвичайно важливий. У наш час немає такої галузі науки, де не застосовують досягнень цього розділу математики. У фізиці та хімії, астрономії та біології, географії та економіці, навіть у лінгвістиці та історії використовують «математичний інструмент».

Алгебра і початки аналізу — корисний і дуже цікавий предмет. Він розвиває аналітичне й логічне мислення, дослідницькі навички, математичну культуру, кмітливість.

Ми маємо надію, що ви не розчарувалися, обравши нелегкий шлях навчатися в математичному класі. У цьому навчальному році ви продовжите вивчати математику за програмою поглибленого рівня. Це не просто. Потрібно бути наполегливими та завзятими, уважними й акуратними, при цьому найголовніше — не бути байдужими до математики, а любити цю красиву науку. Сподіваємося, що ви з інтересом будете засвоювати нові знання. Ми віримо в те, що цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте в руках. Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Підручник поділено на сім параграфів, кожний з яких складається з пунктів. Вивчаючи теоретичний матеріал пункту, особливу увагу звертайте на текст, який надруковано **жирним шрифтом**, ***жирним курсивом*** і *курсивом*; так у книзі виділено означення, правила та найважливіші математичні твердження.

У цій книзі ви ознайомитеся з низкою важливих теорем. Деякі з них подано з доведеннями. У тих випадках, коли доведення виходять за межі розглядуваного курсу, у підручнику наведено тільки формулювання теорем.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв’язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв’язання.

До кожного пункту дібрано завдання для самостійного розв’язування. Серед завдань є як прості й середні за складністю, так і важкі, особливо ті, що позначено зірочкою (*).

Якщо після виконання домашніх завдань залишається вільний час і ви хочете дізнатися більше, то рекомендуємо звернутися до рубрики «Коли зроблено уроки». Матеріал, викладений там, є непростим. Але тим цікавіше випробувати свої сили!

Крім того, у підручнику ви зможете прочитати оповідання з історії математики, зокрема про діяльність видатних українських математиків. Назви цих оповідань надруковано синім кольором.

Дерзайте! Бажаємо успіху!

### Шановні колеги та колежанки!

Ми знаємо, що підготовка до уроку в класі з поглибленим вивченням математики — робота нелегка. Організація такого навчального процесу вимагає від вас великих зусиль, адже ви формуєте навчальний матеріал по крихтах, збираючи його в багатьох посібниках. Ми сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій і шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

У книзі дібрано великий і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв’язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Матеріал рубрики «Коли зроблено уроки» може бути використаний для організації роботи математичного гуртка та факультативних занять.

Бажаємо творчого натхнення й терпіння.

## Умовні позначення

$n^{\circ}$ завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;

$n^{\bullet}$ завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;

$n^{\bullet\bullet}$ завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;

$n^{*}$ задачі для математичних гуртків і факультативів;

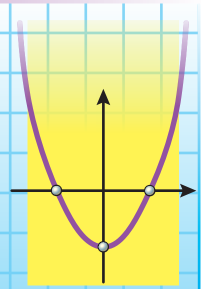
ключові задачі, результати яких можуть бути використані під час розв’язування інших задач;

◀ закінчення доведення теореми, розв’язання задачі;


рубрика «Коли зроблено уроки».

**Зеленим** кольором позначено номери задач, що рекомендуються для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, які можна розв’язувати усно.

# § 1 ПОВТОРЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ З КУРСУ АЛГЕБРИ 8–9 КЛАСІВ



## 1. Задачі на повторення курсу алгебри 8–9 класів

### ВПРАВИ

#### Перетворення раціональних виразів

**1.1.** Спростіть вираз $\left(\dfrac{ab}{a-b}+a\right)\cdot\left(\dfrac{ab}{a+b}-a\right):\dfrac{a^2b^2}{b^2-a^2}$.

**1.2.** Спростіть вираз $\left(\dfrac{a+5}{(a-9)(a+9)}+\dfrac{a+7}{(a-9)^2}\right)\left(\dfrac{a-9}{a+3}\right)^2+\dfrac{7+a}{9+a}$.

**1.3.** Спростіть вираз $x^2y^2\left(\dfrac{1}{(x+y)^2}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)+\dfrac{2}{(x+y)^3}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\right)$.

**1.4.** Спростіть вираз $\dfrac{a^2-1}{b^2+b}\left(1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{b}}\right)\cdot\dfrac{1+b-b^3-b^4}{1-a^2}$.

**1.5.** Доведіть тотожність

$$\frac{(x-y)^2+xy}{(x+y)^2-xy}\left(\frac{x^5+y^5+x^3y^2+x^2y^3}{(x^3-y^3)(x^3+y^3+x^2y+xy^2)}\right)^{-1}=x-y.$$

**1.6.** Доведіть тотожність

$$\left(a^2-b^2-\frac{4a^2b-4ab^2}{a+b}\right)\left(\frac{a}{a+b}-\frac{b}{b-a}-\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)^{-1}=(a-b)^2.$$

**1.7.** Доведіть тотожність $\dfrac{3xyz}{xy+yz+zx}+\dfrac{\dfrac{1-x}{x}+\dfrac{1-y}{y}+\dfrac{1-z}{z}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}}=1$.

**1.8.** Спростіть вираз $\dfrac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)^2-x^2}+\dfrac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2-1}+\dfrac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}$.

**1.9.** Спростіть вираз $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}+\frac{2x(x-1)^2}{x^4+x^2+1}+\frac{2x^2(x^2-1)^2}{x^8+x^4+1}$.

**1.10.** Спростіть вираз

$$\frac{bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{ca}{(b+c)(b+a)}+\frac{ab}{(c+a)(c+b)}+\frac{2abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

**1.11.** Доведіть тотожність

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}.$$

**1.12.** Спростіть вираз $\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1+b}+\frac{2}{1+b^2}+\frac{4}{1+b^4}+\ldots+\frac{2^n}{1+b^{2^n}}$.

**1.13.** Відомо, що $a^2-a-1=0$. Доведіть, що

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\left(a^4+\frac{1}{a^4}\right)\ldots\left(a^{2^{n-1}}+\frac{1}{a^{2^{n-1}}}\right)=a^{2^n}-\frac{1}{a^{2^n}}.$$

**1.14.** Доведіть, що коли $a+b+c=1$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$, то $a^2+b^2+c^2=1$.

**1.15.** Доведіть, що коли $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ і $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$, то $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

**1.16.** Розкладіть на множники вираз $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$.

**1.17.** Розкладіть на множники вираз

$$x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2).$$

**1.18.** Попарно різні числа $a$, $b$, $c$ є такими, що $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}$.

Доведіть, що $|abc|=1$.

## Перетворення виразів, які містять квадратні корені

**1.19.** Знайдіть значення виразу $\left(\sqrt{28}-\sqrt{12}\right)\cdot\sqrt{10+\sqrt{84}}$.

**1.20.** Знайдіть значення виразу $\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+11\right)$.

**1.21.** Знайдіть значення виразу $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{2}+3}}-\frac{\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-3}$.

**1.22.** Знайдіть значення виразу $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-6\sqrt{20}}}}$.

**1.23.** Знайдіть значення виразу $\sqrt{6+2\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

**1.24.** Знайдіть значення виразу $\sqrt{17+6\sqrt{4-\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$.

**1.25.** Знайдіть значення виразу $2\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{13-4\sqrt{3}}$.

**1.26.** Знайдіть значення виразу $\left(2-\sqrt{5}\right)\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{7-3\sqrt{5}}$.

**1.27.** Доведіть, що $\left(4+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\sqrt{4-\sqrt{15}}=2$.

**1.28.** Доведіть, що $\sqrt{3-\sqrt{5}}\left(3+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)=8$.

**1.29.** Доведіть, що $\dfrac{\sqrt{21+8\sqrt{5}}}{4+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2$.

**1.30.** Доведіть, що $\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}\left(5+2\sqrt{6}\right)\left(49-20\sqrt{6}\right)}{\sqrt{27}-3\sqrt{18}+3\sqrt{12}-\sqrt{8}}=1$.

**1.31.** Знайдіть значення виразу $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$.

**1.32.** Спростіть вираз $\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)(a-b)}+\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{ab}}{a-b}$.

**1.33.** Спростіть вираз

$$\left(\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}\right):\left(3a^2+3b\sqrt{ab}\right)+\frac{\sqrt{ab}-a}{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}}.$$

**1.34.** Спростіть вираз $\left(\sqrt{a^3-2a^2+a}+\dfrac{4a\sqrt{a}}{\sqrt{(1-a)^2}}\right):\left(\dfrac{\sqrt{a^3}}{a-1}-\left(\dfrac{1-a}{\sqrt{a}}\right)^{-1}\right)$.

**1.35.** Спростіть вираз $\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x}}{1-x+\sqrt{1-x}}+\dfrac{1-\sqrt{1+x}}{1+x-\sqrt{1+x}}\right)^2\dfrac{x^2-1}{2}+1$.

**1.36.** Спростіть вираз $\left(\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^{-2}-1}-\dfrac{1}{x}\right)$,

якщо $0<x<1$.

**1.37.** Спростіть вираз $\left(\dfrac{\left(\sqrt{a^3}-\sqrt{8}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{2}\right)}{a+\sqrt{2a}+2}\right)^2+\sqrt{(a^2+2)^2-8a^2}$.

**1.38.** Спростіть вираз $\dfrac{\dfrac{\sqrt{b^2-2b+1}}{b}+b\sqrt{b^2-2b+1}+2-\dfrac{2}{b}}{\sqrt{b-2+\dfrac{1}{b}}}$, якщо $0<b<1$.

**1.39.** Спростіть вираз

$$\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{b}{b-\sqrt{ab}}+\frac{a}{\sqrt{ab}+a}\right)-\frac{\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}}{2}.$$

**1.40.** Спростіть вираз $\dfrac{1+\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^2\left(b+\sqrt{b^2-1}\right)^2}{\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)\left(b+\sqrt{b^2-1}\right)}$.

**1.41.** Спростіть вираз $\dfrac{b^2-3b-(b-1)\sqrt{b^2-4}+2}{b^2+3b-(b+1)\sqrt{b^2-4}+2}\sqrt{\dfrac{b+2}{b-2}}$ при $b>2$.

**1.42.** Спростіть вираз $\sqrt{\dfrac{a-2\sqrt{a-1}}{a+2\sqrt{a-1}}}+\sqrt{\dfrac{a+2\sqrt{a-1}}{a-2\sqrt{a-1}}}-\dfrac{4}{\sqrt{a^2-4a+4}}$.

**1.43.** Спростіть вираз $\dfrac{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}{\sqrt{1-\frac{8}{x}+\frac{16}{x^2}}}$.

## Раціональні рівняння та нерівності

**1.44.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{5}{x^2-4x+4}-\dfrac{4}{x^2-4}-\dfrac{1}{x+2}=0$;

2) $1+\dfrac{2x}{x+4}+\dfrac{27}{2x^2+7x-4}=\dfrac{6}{2x-1}$;

3) $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-2}{x+2}+\dfrac{x-3}{x+3}+\dfrac{x+4}{x-4}=4$;

4) $\dfrac{x^2+4x+4}{x+4}-\dfrac{2x+6}{x+2}=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}-\dfrac{2x+9}{x+3}$;

5) $|x+2|+|x-3|=5$;

6) $|2x+5|=|x|+2$;

7) $|x-1|-2|x-2|+3|x-3|=4$.

**1.45.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{3x}{x^3-1}-\dfrac{5}{4x^2+4x+4}=\dfrac{1}{2(1-x)}$;

2) $\dfrac{x}{2x^2+12x+10}+\dfrac{3x+1}{4x^2+16x-20}-\dfrac{x+34}{x^3+5x^2-x-5}=0$;

3) $\dfrac{2x-1}{x+1}+\dfrac{3x-1}{x+2}=\dfrac{x-7}{x-1}+4$;

4) $\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}+\dfrac{x^2+8x+20}{x+4}=\dfrac{x^2+4x+6}{x+2}+\dfrac{x^2+6x+12}{x+3}$;

5) $\dfrac{|x-3|}{|x-2|-1}=1$;

6) $||3-x|-x+1|+x=6$.

**1.46.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{4}{x-3}-\frac{a}{2}=2;$ 2) $\frac{2x}{2x+a}-\frac{a-2}{2x-a}-\frac{4a-2a^2}{4x^2-a^2}=0.$

**1.47.** Розв'яжіть рівняння $\frac{6}{x^2-16}-\frac{1}{x-4}=\frac{3a}{4+x}.$

**1.48.** Розв'яжіть нерівність:

1) $(x^2-6x+5)(3x-1)^2>0;$

2) $(x^2-6x+5)(3x-1)^2\leqslant 0;$

3) $(x^2-x-2)(x^2-4x+3)\geqslant 0;$

4) $\frac{(x+1)(x-2)^4(x+3)}{(x-7)(1-3x)}>0;$

5) $\frac{x^3+x^2+3x+3}{x^2-6x+7}\leqslant 0;$

6) $\frac{|x|(x-2)^3}{|x+3|(x-4)}\geqslant 0;$

7) $(x+7)\sqrt{x+x^2-20}>0;$

8) $\frac{x-1}{x+1}<x;$

9) $\frac{14x}{x+1}-\frac{9x-30}{x-4}<0;$

10) $\frac{4}{x+1}+\frac{2}{1-x}<1;$

11) $(x^2+3x+1)(x^2+3x-3)\geqslant 5;$

12) $(x^2+3x)(2x+3)-16\cdot\frac{2x+3}{x^2+3x}\geqslant 0;$

13) $\frac{3x+|x-1|}{x-2}>1;$

14) $\frac{(1+x)(2+x)}{x^2-|x|-2}\geqslant -3x;$

15) $|x^2-3x|+x-2<0;$

16) $|x^2+3x|\geqslant 2-x^2.$

**1.49.** Розв'яжіть нерівність:

1) $(x^2-10x+9)(4x+1)^2>0;$

2) $(x^2-10x+9)(4x+1)^2\leqslant 0;$

3) $(x^2-6x+8)(x^2-4)\geqslant 0;$

4) $\frac{x^3+2x^2+5x+10}{x^2-x-6}\leqslant 0;$

5) $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}\leqslant\frac{2}{x+2};$

6) $(x^2-x-1)(x^2-x-7)<-5;$

7) $(x^2-2x)(x-1)-9\cdot\dfrac{x-1}{x^2-2x}\leqslant 0;$

8) $\dfrac{2x+|x+1|}{x-2}>1;$

9) $\dfrac{4}{|x+3|-1}\geqslant |x+2|;$

10) $\dfrac{(1-x)(2-x)}{x^2+|x|-2}\geqslant -2x;$

11) $|x^2-2x-3|<3x-3;$

12) $|x^2+4x+3|>x+3.$

**1.50.** При яких значеннях параметра $a$ рівняння $(a+4)x^2+(a+4)x+3=0$ має корені?

**1.51.** При яких значеннях параметра $a$ рівняння $(a+3)x^2+(a^2+3a)x+1=0$ має єдиний корінь?

**1.52.** Знайдіть значення параметра $a$, при яких сума коренів рівняння $x^2-(a^2-4a+3)x+a-2=0$ дорівнює нулю.

**1.53.** При яких значеннях параметра $a$ різниця коренів рівняння $(a-2)x^2-(a-4)x-2=0$ дорівнює 3?

**1.54.** При яких значеннях параметра $a$ різниця коренів рівняння $2x^2-(a+1)x+a-1=0$ дорівнює їхньому добутку?

**1.55.** При яких значеннях параметра $a$ нерівність $(a+4)x^2-2ax+2a-6<0$ виконується при всіх значеннях $x$?

**1.56.** При яких значеннях параметра $a$ нерівність $(a^2-1)x^2+2(a-1)x+2>0$ виконується для будь-якого значення $x$?

**1.57.** При яких значеннях параметра $a$ нерівність $(a-3)x^2-2ax+3a-6>0$ виконується при всіх значеннях $x$?

**1.58.** При яких значеннях параметра $a$ один із коренів рівняння $3ax^2-2x-3a-2=0$ більший за 1, а другий менший від 1?

**1.59.** При яких значеннях параметра $a$ корені $x_1$ і $x_2$ рівняння $2x^2-2(2a+1)x+a(a+1)=0$ задовольняють умову $x_1<a<x_2$?

**1.60.** При яких значеннях параметра $a$ корені рівняння $x^2-2ax+a^2-a=0$ належать проміжку $[-2;\ 6]$?

**1.61.** При яких значеннях параметра $a$ нерівність $ax^2-4x+4a>0$ виконується для всіх додатних значень $x$?

**1.62.** При яких значеннях параметра $a$ нерівність $x^2+ax-7a<0$ виконується для всіх $x$ із проміжку $(1;\ 2)$?

**1.63.** При яких значеннях параметра $a$ всі розв'язки нерівності $ax^2-2x-a(a^2+2)<0$ задовольняють нерівність $x^2\leqslant 9$?

**1.64.** При яких значеннях параметра $a$ нерівність $\left|\dfrac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}\right|<3$ виконується для будь-якого значення $x$?

**1.65.** Знайдіть усі значення параметра $q$ такі, що для будь-якого значення параметра $p$ рівняння $x^2+px+q=0$ має розв'язок.

**1.66.** Розв'яжіть рівняння:

1) $(x^2+2x)^2-(x+1)^2=55$;
2) $(x^2+x+4)^2+8x(x^2+x+4)+15x^2=0$;
3) $(x-2)^4+(x+2)^4=82$;
4) $x^2+\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x}-x=4$;
5) $\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2+\frac{x+1}{x-4}=12\cdot\left(\frac{x-2}{x-4}\right)^2$;
6) $\frac{4x}{x^2+x+3}+\frac{5x}{x^2-5x+3}=-\frac{3}{2}$;
7) $x^2+\frac{25x^2}{(x+5)^2}=11$.

**1.67.** Розв'яжіть рівняння:

1) $(x^2-5x+7)^2-(x-2)(x-3)=1$;
2) $5(x^2+2x)^2-11(x^2+2x)(x^2+x+1)+6(x^2+x+1)^2=0$;
3) $x(x+3)(x+5)(x+8)+36=0$;
4) $(x^2+x+1)^2=x^2(3x^2+x+1)$;
5) $x^2+\frac{9x^2}{(x+3)^2}=16$.

## Властивості функцій

**1.68.** Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt{\frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}}$; 2) $y=\sqrt{12x^2-4x^3-9x}-\sqrt{2-|x|}$.

**1.69.** Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt{\frac{7-x}{\sqrt{4x^2-19x+12}}}$; 2) $y=\sqrt{|x-1|(3x-6)}+\frac{3}{x^2+4x-21}$.

**1.70.** Знайдіть область значень функції:

1) $y=\frac{2x-1}{x+2}$; 3) $y=\sqrt{x^2+2x+2}$;
2) $y=x+\frac{1}{x}$; 4) $y=5-\sqrt{x^2-6x+10}$.

**1.71.** Знайдіть область значень функції:

1) $y=\frac{3x-1}{2x+4}$; 3) $y=\sqrt{4x-x^2}$;
2) $y=x+\frac{1}{4x}$; 4) $y=3-\sqrt{x^2-2x+2}$.

**1.72.** Знайдіть найбільше і найменше значення функції

$$y = \frac{1}{x^2 - 4x + 10}.$$

**1.73.** Знайдіть найбільше і найменше значення функції

$$y = \frac{2}{x^2 - 6x + 11}.$$

**1.74.** Знайдіть:

1) $\max\limits_{\mathbb{R}} \dfrac{1}{x^2 + 2}$; 2) $\min\limits_{M} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$, де $M = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

**1.75.** Знайдіть:

1) $\min\limits_{\mathbb{R}} \dfrac{1}{-x^2 + 2x - 3}$; 2) $\max\limits_{M} \left(\sqrt{2 - x} + \sqrt{x + 1}\right)$, де $M = [-1; 2]$.

**1.76.** Для кожного значення параметра $a$ знайдіть найбільше і найменше значення функції $f$ на множині $M$:
1) $f(x) = x^2 + 4x + 5a$, $M = [-1; 1]$;
2) $f(x) = x^2 - 4x$, $M = [-1; a]$, де $a > -1$.

**1.77.** Для кожного значення параметра $a$ знайдіть найбільше і найменше значення функції $f$ на множині $M$:
1) $f(x) = -x^2 + 6x - 2a$, $M = [0; 4]$;
2) $f(x) = 2x - x^2$, $M = [a; 2]$, де $a < 2$.

**1.78.** Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x} + 2\sqrt{x + 3} + \sqrt{x + 8} = 8$.

**1.79.** Розв'яжіть рівняння $3x^2 + \sqrt{x - 1} + 2\sqrt{x + 2} = 17$.

**1.80.** Розв'яжіть рівняння $|x| + |x - 2| + \sqrt{x - 1} = 2$.

**1.81.** Розв'яжіть рівняння $2x\sqrt{4x - x^2} = x^2 + 4$.

**1.82.** Дослідіть на парність функцію:

1) $y = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x + 3} - \dfrac{x^3 + 2x^2}{x - 3}$;

2) $y = \dfrac{|2x - 1| - |2x + 1|}{x^2 - 4}$;

3) $y = \dfrac{x^3 - x}{\sqrt{1 - x} - \sqrt{1 + x}}$;

4) $y = \dfrac{x^2 - 3|x| - 5}{\sqrt{1 - x} - \sqrt{1 + x}}$.

**1.83.** Дослідіть на парність функцію:

1) $y = \dfrac{x^5}{\sqrt{2 - x} - \sqrt{2 + x}}$;

2) $y = \dfrac{1}{(4x - 2)^5} + \dfrac{1}{(4x + 2)^5}$;

3) $y = \dfrac{2x + 1}{x^2 - 3x + 1} - \dfrac{2x - 1}{x^2 + 3x + 1}$.

**1.84.** Відомо, що $D(f) = \mathbb{R}$. Доведіть, що функції $y = f(x) + f(-x)$ і $y = f(x) \cdot f(-x)$ є парними, а функція $y = f(x) - f(-x)$ — непарною.

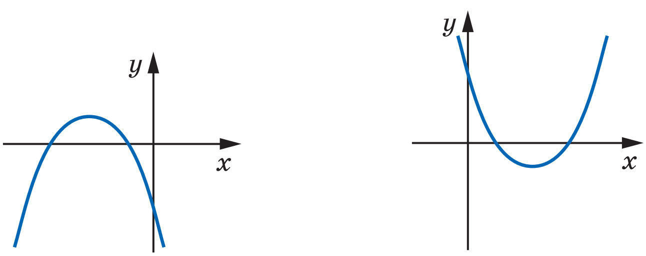
**1.85.** Побудуйте графік функції:

1) $y = (|x| - 1)^2$;
2) $y = \sqrt{1 - |x|}$;
3) $y = \sqrt{|1 - x|}$;
4) $y = \sqrt{|x + 2| - 1}$;
5) $y = \left|\sqrt{|x| - 2} - 1\right|$;
6) $y = \left|\sqrt{2x - 1} - 2\right|$.

**1.86.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \dfrac{1}{|x| - 2}$;
2) $y = \left|\dfrac{1}{x - 4}\right|$;
3) $y = \dfrac{1}{|x + 1| - 2}$;
4) $y = (|x - 2| + 1)^2$;
5) $y = \left|\dfrac{1}{|x| - 1} - 2\right|$;
6) $y = \left|\sqrt{2x + 1} - 2\right|$.

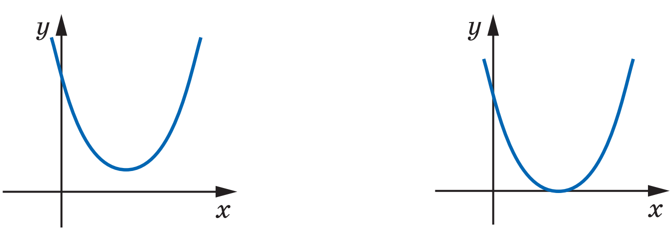
**1.87.** На рисунку 1.1 зображено графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$. Визначте знаки коефіцієнтів $a$, $b$ і $c$.




*а* *б*

**Рис 1.1**

**1.88.** На рисунку 1.2 зображено графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$. Визначте знаки коефіцієнтів $a$, $b$ і $c$.




*а* *б*

**Рис 1.2**

**1.89.** Скільки коренів залежно від значення параметра $a$ має рівняння $|x^2 - 6|x| + 8| = a$?

**1.90.** Скільки коренів залежно від значення параметра $a$ має рівняння

$$|x^2 + 2|x - 2| - 4| = a?$$

**1.91.** Чи є правильним твердження, що на рисунку 1.3 зображено параболу $y = ax^2 + bx + c$ і пряму $y = bx + c$?

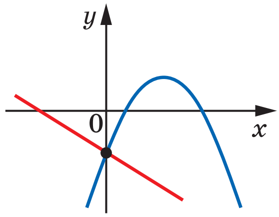



**Рис 1.3**

**1.92.** Знайдіть найбільше і найменше значення функції

$$y = \frac{4x^4}{(x^4+1)^2} - \frac{24x^2}{x^4+1} + 1.$$

## Рівняння і нерівності з двома змінними

**1.93.** Розв’яжіть рівняння:

1) $13x^2 - 12xy + 4y^2 - 4x + 1 = 0$; 2) $|y| + 2 = \sqrt{4 - x^2}$.

**1.94.** Розв’яжіть рівняння:

1) $x^2 + 25y^2 - 6xy - 24y + 9 = 0$; 2) $9 - x^2 = \sqrt{3 + |y|}$.

**1.95.** Побудуйте графік рівняння:

1) $(x - 3)^2 = (y + 5)^2$;
2) $x^2y = |y|$;
3) $x + 2 = \sqrt{|y| - 1}$;
4) $|y - 1| = \sqrt{x}$;
5) $|y - 3| + |x| = 1$;
6) $|x| - 3 = \sqrt{9 - y^2}$;
7) $\dfrac{y - x^2}{1 - x^2} = 1$.

**1.96.** Побудуйте графік рівняння:

1) $(x - 1)^2 = (x + 2y)^2$;
2) $x|y| = x^2$;
3) $x + 2 = \sqrt{|y - 1|}$;
4) $|y| - 1 = \sqrt{x}$;
5) $|y + 1| + |x - 2| = 2$;
6) $(|x| - 1)^2 + (|y| - 3)^2 = 4$;
7) $\dfrac{(x^2 - 4)(x + y)}{y^2 - 1} = 0$.

**1.97.** Побудуйте графік нерівності:

1) $x > |y + 2| - 2$;
2) $|x| \leqslant |y^2 - 2y|$;
3) $(x + y)|y| \geqslant 0$;
4) $(x^2 + y^2 - 1)y^2 \leqslant 0$.

**1.98.** Побудуйте графік нерівності:

1) $y \leqslant |x - 3| + 1$;
2) $|x - 2| - |y + 1| > 2$;

3) $(x-y)|x|<0$; 4) $\dfrac{x^2+y^2-1}{y^2}\geqslant 0$.

**1.99.** Зобразіть на координатній площині $xy$ множину розв'язків системи нерівностей:

1) $\begin{cases} x+2y>1, \\ x-y\leqslant 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 1, \\ (x+1)^2+y^2\leqslant 1. \end{cases}$

**1.100.** Зобразіть на координатній площині $xy$ множину розв'язків системи нерівностей:

1) $\begin{cases} y+x-2>0, \\ x-3y\leqslant 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 4, \\ y\geqslant |x|+1. \end{cases}$

**1.101.** Побудуйте графік нерівності:

1) $\sqrt{x-2y}>\sqrt{x+y}$; 2) $x<\dfrac{6}{y}$.

**1.102.** Побудуйте графік нерівності:

1) $\sqrt{2x-y}<\sqrt{x-y}$; 2) $y>-\dfrac{12}{x}$.

## Метод математичної індукції

**1.103.** Доведіть, що

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

**1.104.** Доведіть, що $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{8}+\ldots+\dfrac{2n-3}{2^{n-1}}+\dfrac{2n-1}{2^n}=3-\dfrac{2n+3}{2^n}$.

**1.105.** Доведіть, що

$$\left(1-\frac{2}{2\cdot 3}\right)\left(1-\frac{2}{3\cdot 4}\right)\left(1-\frac{2}{4\cdot 5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right)=\frac{n+3}{3(n+1)}.$$

**1.106.** Доведіть, що $5^{n+2}+6^{2n+1}\ \vdots\ 31$, де $n\in\mathbb{N}$.

**1.107.** Доведіть, що $7\cdot 5^{2n}+12\cdot 6^n\ \vdots\ 19$, де $n\in\mathbb{N}$.

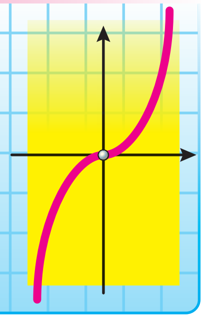
**1.108.** Доведіть, що $14\cdot 3^n+9\cdot 7^{2n}\ \vdots\ 23$, де $n\in\mathbb{N}$.

**1.109.** Доведіть нерівність $2^n>2n$, де $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$.

**1.110.** Доведіть нерівність $2^{n+4}>(n+4)^2$, де $n\in\mathbb{N}$.

**1.111.** Доведіть нерівність $3^n>n^3$, де $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 4$.

# § 2 СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ



## 2. Степенева функція з натуральним і цілим показником

Властивості та графіки функцій $y = x$ і $y = x^2$ добре відомі вам з курсу математики попередніх класів. Ці функції є окремими випадками функції $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, яку називають **степеневою функцією з натуральним показником.**

Оскільки вираз $x^n$, $n \in \mathbb{N}$, має зміст при будь-якому $x$, то *областю визначення степеневої функції з натуральним показником є множина* $\mathbb{R}$.

Очевидно, що розглядувана *функція має єдиний нуль* $x = 0$.

Подальше дослідження властивостей функції $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, проведемо для двох випадків: $n$ — парне натуральне число і $n$ — непарне натуральне число.

- **Перший випадок: $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.**

Зазначимо, що при $k = 1$ отримуємо функцію $y = x^2$, властивості та графік якої було розглянуто в курсі алгебри 8 класу.

Оскільки при будь-якому $x$ вираз $x^{2k}$ набуває тільки невід'ємних значень, то область значень розглядуваної функції не містить жодного від'ємного числа.

Можна показати, що для будь-якого $a \geqslant 0$ існує таке значення аргументу $x$, що $x^{2k} = a$.

↳ Сказане означає, що *областю значень функції $y = x^n$, де $n$ — парне натуральне число, є множина* $[0; +\infty)$.
Якщо $x \neq 0$, то $x^{2k} > 0$.

↳ Отже, *проміжки* $(-\infty; 0)$ *і* $(0; +\infty)$ *є проміжками знакосталості функції $y = x^n$, де $n$ — парне натуральне число.*

*Функція $y = x^n$, де $n$ — парне натуральне число, є парною.* Справді, для будь-якого $x$ із області визначення виконується рівність $(-x)^{2k} = x^{2k}$.

Розглянемо довільні числа $x_1$ і $x_2$ такі, що $x_1 \in (-\infty; 0]$, $x_2 \in (-\infty; 0]$ і $x_1 < x_2$. Тоді $-x_1 > -x_2 \geqslant 0$. Скориставшись властивістю числових нерівностей, отримуємо: $(-x_1)^{2k} > (-x_2)^{2k}$. Звідси $x_1^{2k} > x_2^{2k}$.

Отже, *функція $y = x^n$, де $n$ — парне натуральне число, спадає на проміжку* $(-\infty; 0]$. Аналогічно можна показати, що ця функція *зростає на проміжку* $[0; +\infty)$.

Отримані властивості дають змогу схематично зобразити графік функції $y = x^n$, де $n$ — парне натуральне число (рис. 2.1). Зокрема, графік функції $y = x^4$ зображено на рисунку 2.2.

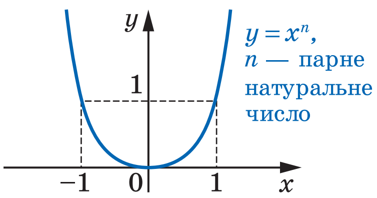



**Рис. 2.1**

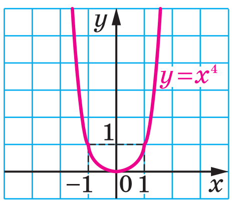



**Рис. 2.2**

• **Другий випадок: $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$ або $k = 0$.**

Зазначимо, що при $n = 1$ отримуємо функцію $y = x$, властивості та графік якої було розглянуто в курсі алгебри 7 класу.

Тепер нехай $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Можна показати, що для будь-якого $a$ існує таке значення аргументу $x$, що $x^{2k+1} = a$.

Сказане означає, що *областю значень функції $y = x^n$, де $n$ — непарне натуральне число, є множина* $\mathbb{R}$.
Якщо $x < 0$, то $x^{2k+1} < 0$; якщо $x > 0$, то $x^{2k+1} > 0$.

Отже, *проміжки $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ є проміжками знакосталості функції $y = x^n$, де $n$ — непарне натуральне число.*

*Функція $y = x^n$, де $n$ — непарне натуральне число, є непарною.* Справді, для будь-якого $x$ із області визначення виконується рівність $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$.

Розглянемо довільні числа $x_1$ і $x_2$ такі, що $x_1 < x_2$. Скориставшись властивістю числових нерівностей, отримуємо: $x_1^{2k+1} < x_2^{2k+1}$.

Отже, *функція $y = x^n$, де $n$ — непарне натуральне число, є зростаючою.*

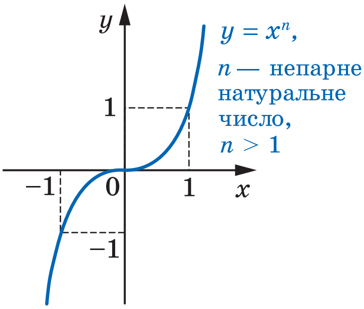



Рис. 2.3

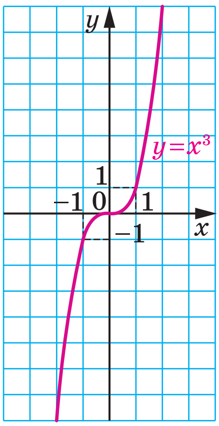



Рис. 2.4

Отримані властивості дають змогу схематично зобразити графік функції $y = x^n$, де $n$ — непарне натуральне число, $n > 1$ (рис. 2.3). Зокрема, графік функції $y = x^3$ зображено на рисунку 2.4.

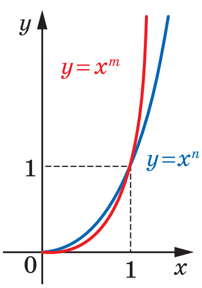
Дослідимо взаємне розміщення графіків функцій $y = x^m$ і $y = x^n$, де $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $m > n$, на проміжку $[0; +\infty)$. Очевидно, що ці графіки мають дві спільні точки: (0; 0) і (1; 1).

Розглянемо різницю $x^m - x^n = x^n (x^{m-n} - 1)$. Оскільки $m > n$, то $(m - n) \in \mathbb{N}$.

Якщо $0 < x < 1$, то $x^n > 0$ і $x^{m-n} < 1$. Звідси $x^n (x^{m-n} - 1) < 0$.

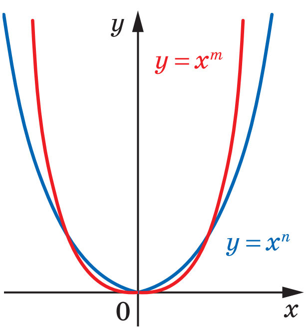
Якщо $x > 1$, то $x^n > 0$ і $x^{m-n} > 1$. Звідси $x^n (x^{m-n} - 1) > 0$.

Отже, на проміжку (0; 1) графік функції $y = x^m$ знаходиться нижче від графіка функції $y = x^n$, а на проміжку $(1; +\infty)$ — вище (рис. 2.5).



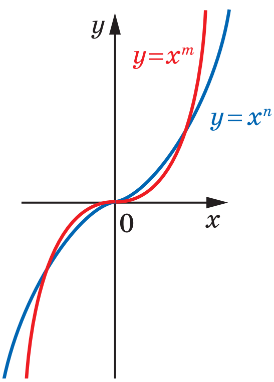

$m > n > 1$,
$x \geqslant 0$

Рис. 2.5




$m$ і $n$ — парні натуральні числа, $m > n$

Рис. 2.6




$m$ і $n$ — непарні натуральні числа, $m > n > 1$

Рис. 2.7

Якщо $m$ і $n$ — парні натуральні числа, то, відобразивши графік, зображений на рисунку 2.5, симетрично відносно осі ординат, отримаємо рисунок 2.6. Для непарних $m$ і $n$ застосуємо симетрію відносно початку координат (рис. 2.7).

Функцію, яку можна задати формулою $y = x^n$, де $n \in \mathbb{Z}$, називають **степеневою функцією із цілим показником.**

Розглянемо випадки, коли показник $n$ є цілим від'ємним числом або нулем.

Областю визначення функції $y = x^0$ є множина $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$, областю значень — одноелементна множина $\{1\}$. Графік цієї функції зображено на рисунку 2.8.

Розглянемо функцію $y = x^{-n}$, де $n \in \mathbb{N}$.

Окремий випадок цієї функції, коли $n = 1$, тобто функція $y = \dfrac{1}{x}$, відомий вам з курсу алгебри 8 класу.

Запишемо функцію $y = x^{-n}$ у вигляді $y = \dfrac{1}{x^n}$. Тоді стає зрозумілим, що *областю визначення функції* $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, *є множина* $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

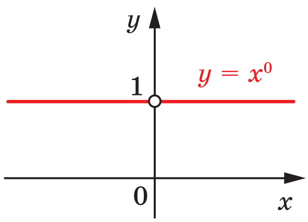



**Рис. 2.8**

Очевидно, що ця функція нулів не має.

Подальші дослідження властивостей функції $y = x^{-n}$, де $n \in \mathbb{N}$, проведемо для двох випадків: $n$ — парне натуральне число і $n$ — непарне натуральне число.

- **Перший випадок: $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.**

Маємо: $x^{-2k} = \dfrac{1}{x^{2k}}$. Оскільки вираз $\dfrac{1}{x^{2k}}$ набуває тільки додатних значень, то до області значень розглядуваної функції не входять ні від'ємні числа, ні число 0.

Можна показати, що для будь-якого $a > 0$ існує таке значення аргументу $x$, що $x^{-2k} = a$.

- Сказане означає, що *областю значень функції* $y = x^{-n}$, *де* $n$ — *парне натуральне число, є множина* $(0;\ +\infty)$.
- Очевидно, що *проміжки* $(-\infty;\ 0)$ *і* $(0;\ +\infty)$ *є проміжками знакосталості функції* $y = x^{-n}$, *де* $n$ — *парне натуральне число.*
- *Функція* $y = x^{-n}$, *де* $n$ — *парне натуральне число, є парною.* Справді, для будь-якого $x$ із області визначення виконуються рівності $(-x)^{-2k} = \dfrac{1}{(-x)^{2k}} = \dfrac{1}{x^{2k}} = x^{-2k}$.

Розглянемо довільні числа $x_1$ і $x_2$ такі, що $x_1 \in (-\infty; 0)$, $x_2 \in (-\infty; 0)$ і $x_1 < x_2$. Тоді $-x_1 > -x_2 > 0$. Скориставшись властивостями числових нерівностей, отримуємо: $0 < -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}$.

Звідси $\left(-\frac{1}{x_1}\right)^{2k} < \left(-\frac{1}{x_2}\right)^{2k}$; $\frac{1}{x_1^{2k}} < \frac{1}{x_2^{2k}}$; $x_1^{-2k} < x_2^{-2k}$.

Отже, *функція* $y = x^{-n}$, *де* $n$ — *парне натуральне число*, *зростає на проміжку* $(-\infty; 0)$.

Аналогічно можна показати, що *функція* $y = x^{-n}$, *де* $n$ — *парне натуральне число*, *спадає на проміжку* $(0; +\infty)$.

Зауважимо, що зі збільшенням модуля $x$ значення виразу $\frac{1}{x^{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$, стають усе меншими й меншими. Через це відстань від точки графіка функції $y = \frac{1}{x^{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$, до осі абсцис зменшується зі збільшенням модуля абсциси точки та може стати як завгодно малою, але ніколи не дорівнюватиме нулю.

Також можна встановити, що зі збільшенням модуля ординати відстань від точки графіка функції до осі ординат зменшується та може стати як завгодно малою, але ніколи не дорівнюватиме нулю.

Отримані властивості дають змогу схематично зобразити графік функції $y = x^{-n}$, де $n$ — парне натуральне число (рис. 2.9). Зокрема, графік функції $y = \frac{1}{x^2}$ зображено на рисунку 2.10.

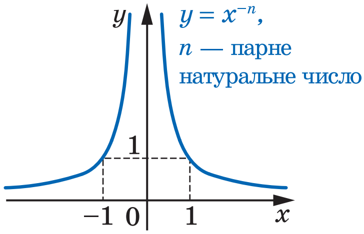



**Рис. 2.9**

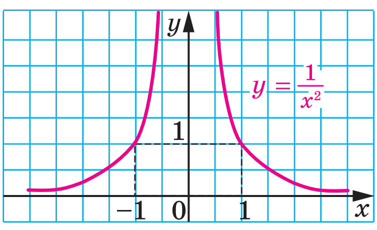



**Рис. 2.10**

- **Другий випадок: $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$.**

Можна показати, що для будь-якого $a \neq 0$ існує таке значення аргументу $x$, що $x^{-(2k-1)} = a$.

Сказане означає, що *областю значень функції* $y = x^{-n}$, *де* $n$ — *непарне натуральне число, є множина* $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Якщо $x < 0$, то $\frac{1}{x^{2k-1}} < 0$; якщо $x > 0$, то $\frac{1}{x^{2k-1}} > 0$.

Отже, *проміжки* $(-\infty; 0)$ *і* $(0; +\infty)$ *є проміжками знакосталості функції* $y = x^{-n}$, *де* $n$ — *непарне натуральне число*.

*Функція* $y = x^{-n}$, *де* $n$ — *непарне натуральне число, є непарною*. Справді, для будь-якого $x$ із області визначення виконуються рівності $(-x)^{-(2k-1)} = \frac{1}{(-x)^{2k-1}} = \frac{1}{-x^{2k-1}} = -x^{-(2k-1)}$.

Розглянемо довільні числа $x_1$ і $x_2$ такі, що $x_1 \in (-\infty; 0)$, $x_2 \in (-\infty; 0)$ і $x_1 < x_2$. Тоді $-x_1 > -x_2 > 0$. Скориставшись властивостями числових нерівностей, отримуємо:

$$-\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2};\quad \left(-\frac{1}{x_1}\right)^{2k-1} < \left(-\frac{1}{x_2}\right)^{2k-1};\quad -\frac{1}{x_1^{2k-1}} < -\frac{1}{x_2^{2k-1}};\quad \frac{1}{x_1^{2k-1}} > \frac{1}{x_2^{2k-1}}.$$

Отже, розглядувана функція спадає на проміжку $(-\infty; 0)$. Аналогічно можна показати, що ця функція спадає і на проміжку $(0; +\infty)$.

Отже, *функція* $y = x^{-n}$, *де* $n$ — *непарне натуральне число*, *спадає на кожному з проміжків* $(-\infty; 0)$ *і* $(0; +\infty)$.

Отримані властивості дають змогу схематично зобразити графік функції $y = x^{-n}$, де $n$ — непарне натуральне число (рис. 2.11). Зокрема, графік функції $y = \frac{1}{x^3}$ зображено на рисунку 2.12.

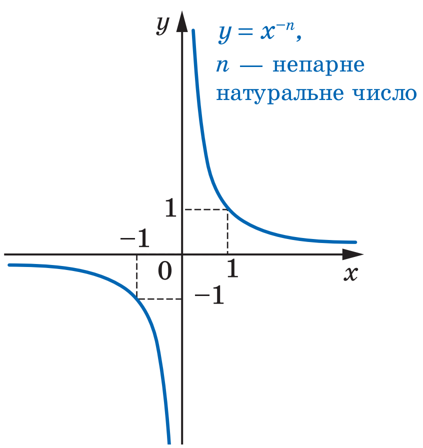



**Рис. 2.11**

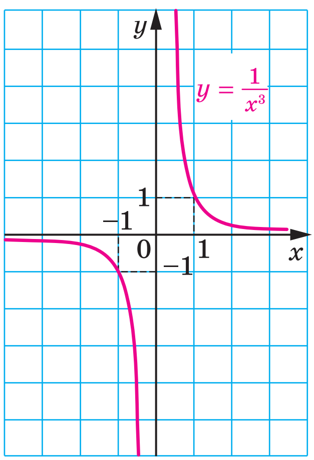
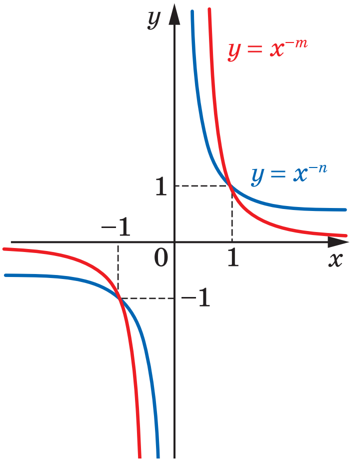


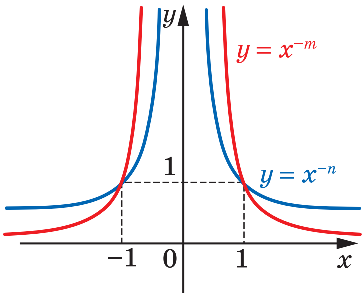

**Рис. 2.12**

Вище було проведено дослідження взаємного розміщення графіків функцій $y = x^m$ і $y = x^n$, де $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $m > n$. Міркуючи аналогічно, можна показати, що схематичне розміщення графіків функцій $y = x^{-m}$ і $y = x^{-n}$, де $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $m > n$, є таким, як показано на рисунках 2.13, 2.14.




*m* і *n* — непарні, $m > n$

**Рис. 2.13**




*m* і *n* — парні, $m > n$

**Рис. 2.14**

## ВПРАВИ

**2.1.°** При яких значеннях $a$ графік функції $y = ax^4$ проходить через точку: 1) $A\ (2;\ -12)$; 2) $B\ (-3;\ -3)$?

**2.2.°** При яких значеннях $a$ графік функції $y = ax^{-3}$ проходить через точку: 1) $A\ (-5;\ 20)$; 2) $B\left(2;\ \frac{1}{24}\right)$?

**2.3.°** Функцію задано формулою $f(x) = x^{19}$. Порівняйте:

1) $f(1{,}4)$ і $f(1{,}8)$;
2) $f(-7{,}6)$ і $f(-8{,}5)$;
3) $f(-6{,}9)$ і $f(6{,}9)$;
4) $f(0{,}2)$ і $f(-12)$.

**2.4.°** Функцію задано формулою $f(x) = x^{20}$. Порівняйте:

1) $f(3{,}6)$ і $f(4{,}2)$;
2) $f(-6{,}7)$ і $f(-5{,}8)$;
3) $f(-2{,}4)$ і $f(2{,}4)$;
4) $f(-15)$ і $f(2)$.

**2.5.°** Дано функцію $f(x) = x^{-16}$. Порівняйте:

1) $f(1{,}6)$ і $f(2{,}2)$;
2) $f(-4{,}5)$ і $f(-3{,}6)$;
3) $f(-3{,}4)$ і $f(3{,}4)$;
4) $f(-18)$ і $f(3)$.

**2.6.°** Дано функцію $f(x) = x^{-19}$. Порівняйте:

1) $f(1,6)$ і $f(2)$;
2) $f(-5,6)$ і $f(-6,5)$;
3) $f(-9,6)$ і $f(9,6)$;
4) $f(0,1)$ і $f(-10)$.

**2.7.°** Скільки коренів має рівняння $x^n = 1600$, якщо:

1) $n$ — парне натуральне число;
2) $n$ — непарне натуральне число?

**2.8.°** Скільки коренів має рівняння $x^{-n} = 2500$, якщо:

1) $n$ — парне натуральне число;
2) $n$ — непарне натуральне число?

**2.9.°** Установіть графічно кількість коренів рівняння:

1) $x^8 = x + 1$; 2) $x^5 = 3 - 2x$; 3) $x^4 = 0,5x - 2$; 4) $x^3 = x^2 - 3$.

**2.10.°** Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} y = x^6, \\ 2x - y - 3 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^5, \\ y = 2 - 0,5x^2. \end{cases}$

**2.11.°** Знайдіть область визначення функції:

1) $y = (x^{-1})^{-1}$; 2) $y = ((x - 2)^{-2})^{-2}$.

**2.12.°** Побудуйте графік функції:

1) $y = (x - 2)^0$; 2) $y = (x^2 - 4x + 3)^0$; 3) $y = \left(\dfrac{1}{x+1}\right)^{-1}$.

**2.13.°** Побудуйте графік рівняння:

1) $(y + 2)^0 = x - 2$; 2) $(y - 2)^0 = (x + 1)^0$.

**2.14.°** Скільки коренів залежно від значення параметра $a$ має рівняння:

1) $x^{12} = a - 6$; 2) $x^{24} = a^2 + 7a - 8$?

**2.15.°** Скільки коренів залежно від значення параметра $a$ має рівняння $x^8 = 9a - a^3$?

**2.16.•** Побудуйте графік функції:

1) $y = x^3 - 1$; 2) $y = (x + 1)^4 - 1$; 3) $y = -\dfrac{1}{2}x^4$; 4) $y = |x^3|$.

**2.17.•** Побудуйте графік функції:

1) $y = x^4 + 2$; 2) $y = (x - 1)^3 + 2$; 3) $y = -x^4$; 4) $y = (|x| - 2)^3$.

**2.18.•** Побудуйте графік функції:

1) $y = |x| x^4$; 2) $y = |x| x^4 + x^5$.

**2.19.•** Побудуйте графік функції:

1) $y = |x| x^3$; 2) $y = |x| x^4 - x^5$.

**2.20.•** Побудуйте графік функції:

1) $y = x^{-2} + 2$; 2) $y = (x - 1)^{-3}$; 3) $y = \dfrac{1}{x|x|}$.

**2.21.•** Побудуйте графік функції:

1) $y = x^{-5} - 3$; 2) $y = (x + 1)^{-4}$; 3) $y = |\, x^{-5}\, |$.

**2.22.•** Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} x^{-2}, \text{ якщо } x \leqslant -1, \\ x^2, \text{ якщо } x > -1. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, установіть проміжки зростання і проміжки спадання даної функції.

**2.23.•** Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{якщо } x < 0, \\ -\sqrt{x}, & \text{якщо } x \geqslant 0. \end{cases}$ Користуючись побудованим графіком, укажіть проміжки зростання і проміжки спадання даної функції.

**2.24.•** Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^8$ на проміжку:

1) $[0; 2]$; 2) $[-2; -1]$; 3) $[-1; 1]$; 4) $(-\infty; -2]$; 5) $(-2; 1)$.

**2.25.•** Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^{-3}$ на проміжку:

1) $\left[\frac{1}{3}; 2\right]$; 2) $[-2; -1]$; 3) $(-\infty; -3]$; 4) $(0; 2]$.

**2.26.•** Парним чи непарним натуральним числом є показник степеня $n$ функції $f(x) = x^n$, якщо:

1) $f(-4) > f(-2)$; 3) $f(-4) < f(-2)$; 5) $f(-4) > f(2)$;
2) $f(-4) < f(2)$; 4) $f(4) > f(2)$; 6) $f(4) > f(-2)$?

**2.27.•** Парним чи непарним є натуральне число $n$ у показнику степеня функції $f(x) = x^{-n}$, якщо:

1) $f(-2) > f(-1)$; 3) $f(-2) < f(-1)$;
2) $f(-2) < f(1)$; 4) $f(2) < f(1)$?

**2.28.•** Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} y = x^{-6}, \\ y = 4 - x^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^{-3}, \\ y = x^3 + 3. \end{cases}$

**2.29.•** Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} y = x^{-3}, \\ y = \frac{1}{8}x^2 - 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^{-2}, \\ y = x^2 - 2. \end{cases}$

**2.30.••** Знайдіть усі функції $f$ такі, що рівність $f(x^3) = x^{21}$ виконується для всіх $x \in \mathbb{R}$.

**2.31.••** Знайдіть усі непарні та визначені на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ функції $f$ такі, що рівність $f(x^4) = x^{-16}$ виконується для всіх $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

**2.32.••** Знайдіть усі парні функції $f$ такі, що рівність $f(x^4) = x^{20}$ виконується для всіх $x \in \mathbb{R}$.

**2.33.••** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{11} + x^3 = 2$; 2) $2x^4 + x^{10} = 3$.

**2.34.••** Розв'яжіть рівняння:

1) $4x^3 + x^7 = -5$; 2) $x^6 + 3x^8 = 4$.

**2.35.••** Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^8$ на проміжку $[-1; a]$, де $a > -1$.

**2.36.••** Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^6$ на проміжку $[a; 2]$, де $a < 2$.

**2.37.*** Розв'яжіть рівняння $5x^{17} - 3x^8 = 2$.

**2.38.*** Розв'яжіть рівняння $11x^{15} + 2x^4 = -9$.

**2.39.*** Наведіть приклад такої послідовності визначених на $\mathbb{R}$ різних функцій $f_1, f_2, \ldots$, що для всіх $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f_k(f_n(x)) = f_{kn}(x)$.

**2.40.*** Наведіть приклад такої послідовності визначених на $\mathbb{R}$ різних функцій $f_1, f_2, \ldots$, що для всіх $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f_k(x) \cdot f_n(x) = f_{k+n}(x)$.

## Функціональний підхід Коші

Вам часто доводиться розв'язувати рівняння, тобто шукати такі значення змінної, при підстановці яких у рівняння отримуємо правильну рівність. Такі рівняння можна було б назвати числовими, оскільки їхніми розв'язками є числа. У математиці вивчають й інші рівняння, розв'язками яких є не числа, а функції. Природно, що їх називають **функціональними рівняннями**.

З функціональними рівняннями ви стикалися раніше. Наприклад, рівність

$$f(x) = f(-x),\ x \in D(f),$$

яка задає парні функції, можна розглядати як функціональне рівняння. Розв'язком цього рівняння є будь-яка парна функція.

Ось ще два приклади функціональних рівнянь:

$$f(x+y) = f(y) + x,\quad x \in \mathbb{R},\quad y \in \mathbb{R}; \tag{1}$$

$$f(x+y) = 2f(y) + x - y,\quad x \in \mathbb{R},\quad y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Розв'яжемо функціональне рівняння (1).

Якщо в рівність $f(x+y) = f(y) + x$ підставити значення змінної $y = 0$, то отримаємо таке:

$$f(x) = f(0) + x.$$

Оскільки $f(0)$ — деяка стала, то тим самим доведено, що розв'язками рівняння (1) можуть бути лише лінійні функції виду $f(x) = x + c$, де $c$ — стала.

Водночас зауважимо, що наведені міркування не гарантують того, що кожна лінійна функція виду $f(x) = x + c$ задовольняє функціональне рівняння (1). Отже, треба зробити перевірку.

Підставивши функцію $f(x) = x + c$ у функціональне рівняння (1), отримаємо очевидну тотожність

$$(x + y) + c = (y + c) + x.$$

*Відповідь*: $f(x) = x + c$, де $c$ — будь-яка стала.

Зауважимо, що останній етап розв'язування задачі — перевірка — є важливою частиною розв'язування, оскільки на ньому можуть бути «відсіяні» сторонні розв'язки.

Проілюструємо це на прикладі розв'язування функціонального рівняння (2).

Міркуючи аналогічно попередній задачі, підставимо $y = 0$. Тоді

$$f(x) = 2f(0) + x.$$

Отже, розв'язками функціонального рівняння (2) знову можуть бути лише лінійні функції виду $f(x) = x + c$, де $c$ — стала.

Проведемо перевірку отриманих функцій. Підставляючи функцію $f(x) = x + c$ у рівняння (2), отримаємо:

$$x + y + c = 2\,(y + c) + x - y;$$

$$c = 0.$$

Бачимо, що серед усіх лінійних функцій $f(x) = x + c$ функціональне рівняння (2) задовольняє лише одна: $f(x) = x$.

*Відповідь*: $f(x) = x$.

**Огюстен Луї Коші**

(1789–1857)

Французький математик. Опублікував понад 800 робіт з арифметики, теорії чисел, алгебри, математичного аналізу, диференціальних рівнянь, теоретичної та небесної механіки, математичної фізики; займався також дослідженнями з тригонометрії, теорії пружності, оптики, астрономії. Був членом Паризької академії наук, Лондонського королівського товариства та майже всіх академій наук світу.

Функціональні рівняння грають у математиці важливу роль. Оскільки кожне функціональне рівняння задає певну властивість функцій, то за допомогою функціональних рівнянь можна визначати конкретні класи функцій. Такий спосіб визначення функцій через опис їхніх характерних властивостей у вигляді функціональних рівнянь запровадив відомий французький математик О. Коші. Його ім'я носять такі функціональні рівняння:

$$f(x+y)=f(x)+f(y),$$

$$f(xy)=f(x)+f(y),$$

$$f(x+y)=f(x)f(y),$$

$$f(xy)=f(x)f(y).$$

Використовуючи рівняння Коші, можна, наприклад, визначити степеневу функцію $f(x)=x^5$.

Розглянемо задачу: знайти всі функції $f$, визначені на $\mathbb{R}$, які одночасно задовольняють такі умови:

1) $f$ — непарна зростаюча функція,
2) $f(2)=32$,
3) $f(xy)=f(x)f(y)$ для всіх значень $x>0$, $y>0$.

На заняттях математичного гуртка ви зможете розглянути доведення того, що даний перелік умов задовольняє лише степенева функція $f(x)=x^5$.

## ВПРАВИ

**2.41.** Знайдіть усі функції $f$, які для всіх $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$ задовольняють умову $f(x)+f(y)=x+y$.

**2.42.** Знайдіть усі функції $f$, які для всіх $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$ задовольняють умову $f(xy+1)=f(x)+1$.

**2.43.** Знайдіть усі функції $f$, які для всіх $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$ задовольняють умову $f(y+f(x))=(x-1)f(y)$.

**2.44.** Чи існує функція $f$, визначена на $\mathbb{R}$ і відмінна від $f(x)=x^5$, яка одночасно задовольняє такі умови:

1) $f(2)=32$;
2) $f(xy)=f(x)f(y)$ для всіх $x>0$, $y>0$?

**2.45.** Знайдіть усі функції $f$, які для всіх $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$ задовольняють умову $f(2x-3y)+12xy=f(2x)+f(3y)$.

## 3. Обернена функція

На рисунках 3.1, 3.2 зображено графіки функцій $f$ і $g$.

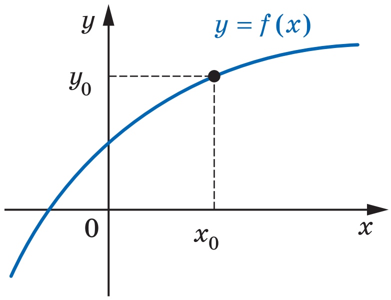



**Рис. 3.1**

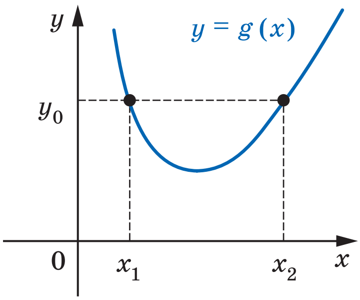



**Рис. 3.2**

Будь-яка горизонтальна пряма перетинає графік функції $f$ не більше ніж в одній точці. Це означає, що кожному числу $y_0 \in E(f)$ відповідає єдине число $x_0 \in D(f)$ таке, що $y_0 = f(x_0)$. Функція $g$ такої властивості не має. Справді, з рисунка 3.2 видно, що значенню $y_0$ відповідають два значення аргументу $x_1$ і $x_2$ такі, що $y_0 = g(x_1)$ і $y_0 = g(x_2)$.

**Означення.** **Функцію $y = f(x)$ називають оборотною, якщо для будь-якого $y_0 \in E(f)$ існує єдине $x_0 \in D(f)$ таке, що $y_0 = f(x_0)$.**

Функція $f$ (рис. 3.1) є оборотною. Функція $g$ (рис. 3.2) не є оборотною.

Функції $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$ є прикладами оборотних функцій (рис. 3.3).

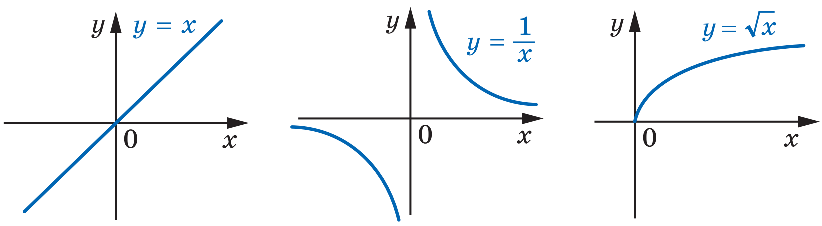



**Рис. 3.3**

Функція $y = x^2$ не є оборотною. Наприклад, значенню функції, яке дорівнює 4, відповідають два значення аргументу $x_1 = -2$ і $x_2 = 2$.

**Теорема 3.1.** ***Якщо функція є зростаючою (спадною), то вона є оборотною.***

*Доведення.* Припустимо, що існує зростаюча функція $f$, яка не є оборотною. Тоді знайдеться $y_0 \in E(f)$, для якого існують $x_1$ і $x_2$ $(x_1 < x_2)$ такі, що $f(x_1) = f(x_2) = y_0$. Разом з тим функція $f$ — зростаюча, і з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що $f(x_1) < f(x_2)$. Отримали суперечність.

Аналогічно можна розглянути випадок, коли функція $f$ є спадною. ◄

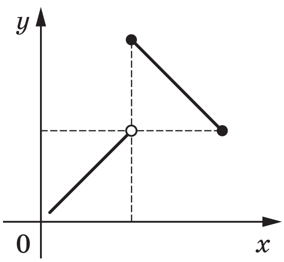


**Рис. 3.4**

Зазначимо, що обернене твердження не є правильним, тобто не будь-яка оборотна функція є зростаючою (спадною). Наприклад, на рисунку 3.4 зображено графік оборотної функції, яка не є ні зростаючою, ні спадною.

Розглянемо функцію $y = f(x)$, задану таблично:

| $x$ | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|
| $y$ | $\sqrt{5}$ | $\sqrt{6}$ | $\sqrt{7}$ |

Функція $f$ є оборотною.

Поміняємо рядки таблиці місцями та розглянемо функцію $y = g(x)$, задану отриманою таблицею:

| $x$ | $\sqrt{5}$ | $\sqrt{6}$ | $\sqrt{7}$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | 5 | 6 | 7 |

Функції $f$ і $g$ зв'язані такими властивостями:

1) $D(f) = E(g)$ і $E(f) = D(g)$;

2) $f(5) = \sqrt{5}$, $g\left(\sqrt{5}\right) = 5$;

$f(6) = \sqrt{6}$, $g\left(\sqrt{6}\right) = 6$;

$f(7) = \sqrt{7}$, $g\left(\sqrt{7}\right) = 7$.

Ці рівності означають, що коли $f(x_0) = y_0$, то $g(y_0) = x_0$.

У таких випадках говорять, що функція $g$ є **оберненою** до функції $f$, а функція $f$ — **оберненою** до функції $g$. Такі функції $f$ і $g$ називають **взаємно оберненими**.

**Означення.** **Функції $f$ і $g$ називають взаємно оберненими, якщо:**
1) $D(f) = E(g)$ **і** $E(f) = D(g)$;
2) **для будь-якого** $x_0 \in D(f)$ **із рівності** $f(x_0) = y_0$ **випливає, що** $g(y_0) = x_0$, **тобто** $g(f(x_0)) = x_0$.

Можна показати, що другу умову в означенні можна замінити на таку: для будь-якого $x_0 \in D(g)$ із рівності $g(x_0) = y_0$ випливає, що $f(y_0) = x_0$, тобто $f(g(x_0)) = x_0$.

Коли функція $f$ не є оборотною, то не існує функції, оберненої до неї. Будь-яка оборотна функція має обернену.

**ПРИКЛАД 1** Доведіть, що функція $f(x) = 2x - 1$ є оборотною. Знайдіть обернену функцію.

*Розв'язання.* Функція $f(x) = 2x - 1$ є зростаючою. Отже, вона є оборотною.

Щоб задати обернену функцію, потрібно вказати правило, яке дає змогу за кожним значенням змінної $y$ знайти відповідне значення змінної $x$ таке, що $y = 2x - 1$.

Маємо: $2x = y + 1$; $x = \frac{y+1}{2}$.

Отримана рівність задає функцію з аргументом $y$ і залежною змінною $x$.

Традиційно незалежну змінну позначають буквою $x$, а залежну — буквою $y$. Дотримуючись таких позначень, можна сказати, що ми отримали функцію, яку задано формулою $y = \frac{x+1}{2}$.

Покажемо, що функції $g(x) = \frac{x+1}{2}$ і $f(x) = 2x - 1$ є взаємно оберненими.

Маємо: $D(f) = E(g) = \mathbb{R}$, $E(f) = D(g) = \mathbb{R}$.

Нехай $f(x_0) = y_0$, тобто $y_0 = 2x_0 - 1$. Доведемо, що $g(y_0) = x_0$.

Маємо: $g(y_0) = \frac{y_0+1}{2} = \frac{2x_0 - 1 + 1}{2} = x_0$. ◄

Функція $y = x^2$ не є оборотною. Разом з тим ця функція зростає на проміжку $[0; +\infty)$. Отже, функція $f(x) = x^2$, $D(f) = [0; +\infty)$, є оборотною. Також прийнято говорити, що функція $y = x^2$ є **оборотною на множині** $[0; +\infty)$. Знайдемо функцію, обернену до функції $f$.

Отримуємо: $y = x^2$, де $x \in [0; +\infty)$. Звідси $\sqrt{y} = \sqrt{x^2} = |x| = x$.

Рівність $\sqrt{y} = x$ задає функцію з аргументом $y$ і залежною змінною $x$.

Скориставшись традиційними позначеннями, отримаємо функцію $y = \sqrt{x}$, обернену до функції $f$.

Покажемо, що функції $f\ (x)=x^2$, $D\ (f)=[0;\ +\infty)$, і $g(x)=\sqrt{x}$ є взаємно оберненими.

Маємо: $D\ (f)=E\ (g)=[0;\ +\infty)$, $E\ (f)=D\ (g)=[0;\ +\infty)$.

Нехай $f(x_0)=y_0$, тобто $y_0=x_0^2$, де $x_0\geqslant 0$.

Запишемо: $g(y_0)=\sqrt{y_0}=\sqrt{x_0^2}=|\,x_0\,|=x_0$.

**Теорема 3.2.** ***Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y=x$.***

*Доведення.* Нехай точка $M\ (a;\ b)$ належить графіку функції $y=f\ (x)$. Тоді $b=f\ (a)$. Якщо функція $g$ є оберненою до функції $f$, то $g\ (b)=a$, тобто точка $N\ (b;\ a)$ належить графіку функції $y=g\ (x)$.

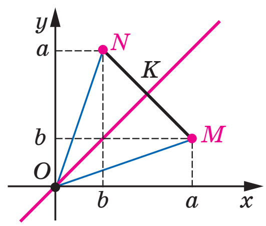


**Рис. 3.5**

Покажемо, що точки $M$ і $N$ є симетричними відносно прямої $y=x$.

Якщо $a=b$, то точки $M$ і $N$ збігаються та належать прямій $y=x$.

При $a\neq b$ маємо (рис. 3.5): $ON=\sqrt{a^2+b^2}$, $OM=\sqrt{a^2+b^2}$, тобто точка $O$ рівновіддалена від кінців відрізка $MN$, а отже, належить серединному перпендикуляру відрізка $MN$. Середина $K$ відрізка $MN$ має координати $\left(\frac{a+b}{2};\ \frac{a+b}{2}\right)$, тобто належить прямій $y=x$. Отже, пряма $y=x$ є серединним перпендикуляром відрізка $MN$. ◄

Доведену теорему ілюструють графіки взаємно обернених функцій, які ми розглянули вище (рис. 3.6).

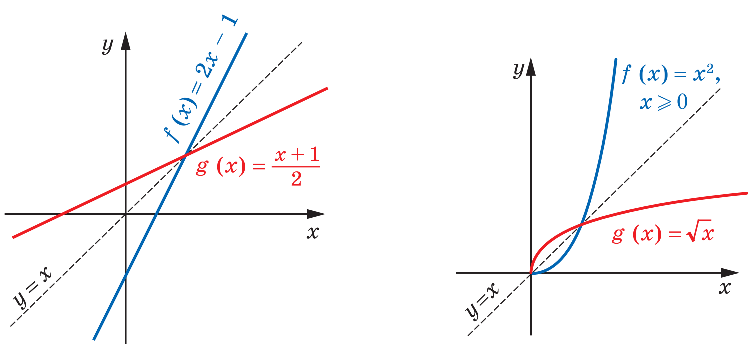


**Рис. 3.6**

**Теорема 3.3.** ***Якщо функція f є зростаючою (спадною), то обернена до неї функція g є також зростаючою (спадною).***

*Доведення.* Припустимо, що функція $f$ зростаюча, але при цьому обернена до неї функція $g$ не є зростаючою. Тоді знайдуться такі $y_1 \in D(g)$ і $y_2 \in D(g)$, що з нерівності $y_1 < y_2$ випливатиме нерівність $g(y_1) \geqslant g(y_2)$. Нехай $g(y_1) = x_1$, $g(y_2) = x_2$, тому $x_1 \geqslant x_2$. Оскільки функція $f$ зростаюча, то $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, тобто $y_1 \geqslant y_2$. Отримали суперечність.

Для спадної функції міркуємо аналогічно. ◄

**Теорема 3.4.** ***Спільні точки графіків зростаючих взаємно обернених функцій лежать на прямій $y = x$.***

*Доведення.* Нехай $M(a; b)$ — спільна точка графіків взаємно обернених зростаючих функцій $f$ і $g$. Доведемо, що $a = b$.

Будемо міркувати від супротивного. Припустимо, наприклад, що $a < b$. Оскільки графіки взаємно обернених функцій $f$ і $g$ симетричні відносно прямої $y = x$, то точка $N(b; a)$ є для них спільною. З огляду на зростання функції $f$ можна записати: $f(a) < f(b)$. Але $f(a) = b$, $f(b) = a$. Отримали $b < a$, що суперечить припущенню $a < b$. Аналогічно розглядається випадок, коли $a > b$. Таким чином, $a = b$. ◄

Зауваження. Звернемо увагу на те, що умова зростання у формулюванні теореми 3.4 є обов'язковою. Наприклад, функції $f(x) = -x$ і $g(x) = -x$ є взаємно оберненими, проте їхні спільні точки, наприклад $A(-1; 1)$ і $B(1; -1)$, не належать прямій $y = x$.

**Наслідок.** ***Якщо функції f і g — взаємно обернені та зростаючі, то рівняння $f(x) = g(x)$ рівносильне кожному з рівнянь $f(x) = x$ або $g(x) = x$.***

Доведіть цю теорему самостійно.

**ПРИКЛАД 2** Розв'яжіть рівняння $\sqrt{\sqrt{x} + 5} = x - 5$.

*Розв'язання.* Зробимо заміну $\sqrt{x} = t$. Отримуємо: $\sqrt{t+5} = t^2 - 5$. Розглянемо функції $f(t) = \sqrt{t+5}$ і $g(t) = t^2 - 5$, $D(g) = [0; +\infty)$. Ці функції є взаємно оберненими і зростаючими. Тоді з наслідку з теореми 3.4 випливає, що рівняння $\sqrt{t+5} = t^2 - 5$ рівносильне системі $\begin{cases} t^2 - 5 = t, \\ t \geqslant 0. \end{cases}$ Звідси $t = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$. Тепер можна записати:

$$\sqrt{x} = \frac{1+\sqrt{21}}{2}; \quad x = \frac{22 + 2\sqrt{21}}{4} = \frac{11+\sqrt{21}}{2}.$$

*Відповідь*: $\frac{11+\sqrt{21}}{2}$. ◄

## ВПРАВИ

**3.1.°** Які з функцій, графіки яких зображено на рисунку 3.7, є оборотними?

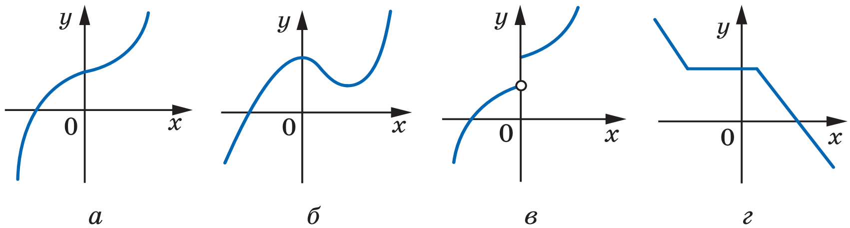


**Рис. 3.7**

**3.2.°** Які з функцій, графіки яких зображено на рисунку 3.8, є оборотними?

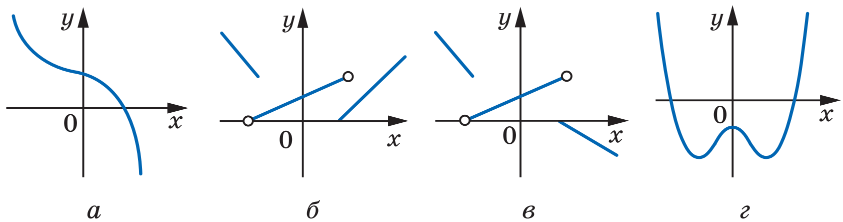


**Рис. 3.8**

**3.3.°** Доведіть, що дана функція не є оборотною:

1) $y = |x|$; 2) $y = \frac{1}{x^4}$; 3) $y = 5$; 4) $y = [x]$.

**3.4.°** Доведіть, що функції $f$ і $g$ є взаємно оберненими:

1) $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$, $g(x) = 3x - 1$;

2) $f(x) = \frac{1}{x-2}$, $g(x) = \frac{2x+1}{x}$;

3) $f(x) = \sqrt{x+2}$, $g(x) = x^2 - 2$, $D(g) = [0; +\infty)$.

**3.5.°** Доведіть, що функції $f$ і $g$ є взаємно оберненими:

1) $f(x) = 4x + 2$, $g(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{2}$;

2) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $g(x) = \frac{x}{1-x}$;

3) $f(x) = (x-3)^2$, $D(f) = [3; +\infty)$, $g(x) = \sqrt{x} + 3$.

**3.6.°** Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = 3x - 1$;
2) $y = \frac{1}{x}$;
3) $y = \frac{1}{2x+1}$;
4) $y = \frac{1}{3}x + 4$.

**3.7.°** Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = 0{,}2x + 3$;
2) $y = \frac{1}{x-1}$;
3) $y = \frac{4}{x+2}$;
4) $y = 4x - 5$.

**3.8.•** Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = \frac{x}{x-1}$;
2) $y = \sqrt{2x-1}$;
3) $y = 2\sqrt{x} - 1$;
4) $y = x^2,\ D(y) = (-\infty;\ 0]$;
5) $y = \frac{1-x}{1+x}$;
6) $y = \begin{cases} \sqrt{x-2}, \text{ якщо } x \geqslant 3, \\ 2x - 5, \text{ якщо } x < 3. \end{cases}$

**3.9.•** Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = \frac{x+2}{x}$;
2) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$;
3) $y = \sqrt{x^2 - 4},\ D(y) = [2;\ +\infty)$;
4) $y = \begin{cases} 2 - x^2, \text{ якщо } x \geqslant 1, \\ 2 - x, \text{ якщо } x < 1. \end{cases}$

**3.10.•** Побудуйте в одній системі координат графік даної функції та графік функції, оберненої до неї:

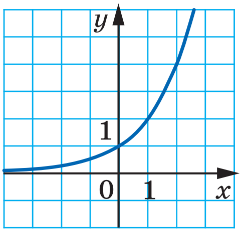
1) $y = -0{,}5x + 2$;
2) $y = \sqrt{x+1}$;
3) $y = \begin{cases} x, \text{ якщо } x \geqslant 0, \\ 2x, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$

**3.11.•** Побудуйте в одній системі координат графік даної функції та графік функції, оберненої до неї:

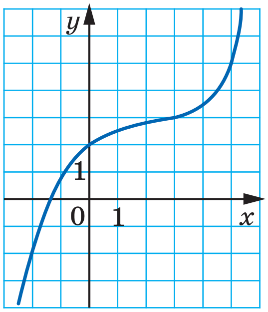
1) $y = 3x - 1$;
2) $y = x^2 - 4$, якщо $x \geqslant 0$;
3) $y = \begin{cases} \sqrt{x}, \text{ якщо } x \geqslant 0, \\ \frac{1}{2}x, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$

**3.12.•** Користуючись графіком функції $y = f(x)$, зображеним на рисунку 3.9, побудуйте графік функції, оберненої до функції $f$.

**3.13.•** Користуючись графіком функції $y = f(x)$, зображеним на рисунку 3.10, побудуйте графік функції, оберненої до функції $f$.




*а*




*б*

**Рис. 3.9**

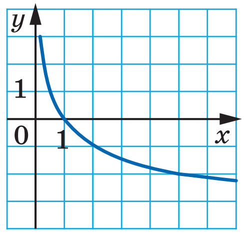



**Рис. 3.10**

**3.14.•** Доведіть, що функція $y = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{якщо } 0 \leqslant x < 1, \\ \sqrt{x-1}, & \text{якщо } 1 \leqslant x < 2 \end{cases}$ збігається з оберненою до неї функцією.

**3.15.•** Доведіть, що функція, обернена до лінійної функції $y = kx + b$ при $k \neq 0$, теж є лінійною.

**3.16.••** Доведіть, що функція, обернена до непарної функції, також є непарною.

**3.17.••** Нехай $g$ — функція, обернена до функції $f(x) = x^5 + 6x^3$.
1) Знайдіть $g(7)$.
2) Розв'яжіть рівняння $g(x) = -1$.
3) Скільки коренів має рівняння $g(x) = c$ залежно від значення параметра $c$?

**3.18.••** Нехай $g$ — функція, обернена до функції $f(x) = x^3 + \sqrt{x-2}$.
1) Знайдіть $g(28)$.
2) Розв'яжіть рівняння $g(x) = 1$.
3) Чи існує таке значення $c$, що рівняння $g(x) = c$ має два корені?

**3.19.••** Функція $g$ є оберненою до функції $f(x) = x^3 + x - 3$. Розв'яжіть рівняння $g(x) = x^3 + x + 3$.

**3.20.••** Функція $g$ є оберненою до функції $f(x) = x^3 + x + 12$. Розв'яжіть рівняння $g(x) = x^3 + x - 12$.

**3.21.••** Функція $g$ є оберненою до функції $f(x) = x^5 + x - 1$. Розв'яжіть рівняння $f(x) = g(x)$.

**3.22.••** Функція $f$ є оберненою до функції $g(x) = x^3 + x - 8$. Розв'яжіть рівняння $f(x) = g(x)$.

**3.23.••** Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x-\frac{1}{8}}=x^2+\frac{1}{8}$.

**3.24.••** Розв'яжіть рівняння $\sqrt{1+\sqrt{x}}=x-1$.

**3.25.••** Знайдіть функцію $g$, обернену до функції $f(x)=x^2$, $D(f)=(-1;\ 0]\cup[3;\ 4)$.

**3.26.••** Знайдіть функцію $g$, обернену до функції $f(x)=-x^2$, $D(f)=[-3;\ -2)\cup[0;\ 1)$.

**3.27.••** Чи існує оборотна функція $f$ така, що $D(f)=\mathbb{N}\cup\{0\}$, $E(f)=\mathbb{N}$?

**3.28.••** Чи існує оборотна функція $f$ така, що $D(f)=\mathbb{Z}$, $E(f)=\mathbb{N}$?

**3.29.••** Функція $f$ і оборотна функція $g$ є такими, що для всіх $x\in\mathbb{R}$ виконується рівність $f(f(x))=g(x)$. Доведіть, що $f$ — оборотна функція.

**3.30.*** Чи існує оборотна функція $f$ така, що $D(f)=\mathbb{Q}$, $E(f)=\mathbb{N}$?

**3.31.*** Наведіть приклад таких взаємно обернених функцій $f$ і $g$, що при всіх $x\in\mathbb{R}$ виконується рівність $f(x)-g(x)=x$.

**3.32.*** Функція $f$ має обернену функцію $g$. Відомо, що нерівність $\frac{1}{2}x-1<f(x)<\frac{1}{2}x+1$ виконується для всіх $x\in\mathbb{R}$, а рівняння $g(x)=10-2x^2$ має один додатний корінь. Знайдіть цей корінь наближено з абсолютною похибкою[1] 0,25.

**3.33.*** Функція $g$ є оберненою до зростаючої функції $f$ такої, що $D(f)=[0;\ 1]$, $E(f)=[0;\ 1]$, $f(0)=0$, $f(1)=1$. Доведіть нерівність

$$f\left(\frac{1}{10}\right)+f\left(\frac{2}{10}\right)+\ldots+f\left(\frac{9}{10}\right)+g\left(\frac{1}{10}\right)+g\left(\frac{2}{10}\right)+\ldots+g\left(\frac{9}{10}\right)\leqslant\frac{99}{10}.$$

**3.34.*** 1) Функція $f$ і оборотна функція $g$ є такими, що для всіх $x\in\mathbb{R}$ виконується рівність $f(f(x))=g(x)$. Доведіть, що $f$ — оборотна функція.

2) Знайдіть усі функції $f$ такі, що для будь-яких $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$ виконується рівність

$$xf\ (f\ (x)-2y)=9x\ (x-y)+yf\ (x).$$

[1] **Абсолютною похибкою** називають модуль різниці між наближеним і точним значенням величини.

## Львівська математична школа

Ви тримаєте в руках підручник «Алгебра і початки аналізу». У назві з'явилося нове словосполучення — «початки аналізу». Що ж приховано за цією назвою? Відповідь дуже проста: математичний аналіз вивчає функції. Цього року ви починаєте ознайомлюватися з елементами аналізу: вам доведеться розглядати все нові й нові класи функцій, вивчати їхні властивості, опановувати методи дослідження функцій.

У першій половині XX ст. вивчення певних класів функцій привело до появи нової математичної дисципліни — «функціонального аналізу». Важливу, фактично головну, роль у створенні цієї дисципліни відіграли науковці Львівської математичної школи.

У 20–30 рр. XX ст. місто Львів було справжньою світовою математичною столицею. У той час у його наукових закладах працювали такі легендарні математики, як Казимир Куратовський, Станіслав Мазур, Владислав Орліч, Вацлав Серпінський, Станіслав Улам, Юліуш Шаудер, Гуґо Штейнгауз і багато інших. Кваліфікація науковців Львова була настільки високою, що всесвітньо відомий математик, автор видатних теорем у математичній логіці та теорії множин Альфред Тарський не пройшов за конкурсом на вакантну посаду професора Львівського університету.

Математики Львова створили міцний науковий колектив, відомий як Львівська математична школа. Її керівником вважають геніального математика Стефана Банаха.

**Стефан Банах**
(1892–1945)


**Підручник Банаха**
**«Курс функціонального аналізу»**

Сьогодні світова математична спільнота із цілковитою підставою вважає С. Банаха засновником функціонального аналізу. Один із перших у світі підручників із цієї дисципліни написав саме Банах. Багато результатів Банаха та введених ним понять стали класичними. Наприклад, досліджені вченим множини одержали назву «простори Банаха» й зараз входять до необхідного мінімуму знань усіх, хто навчається у вищому навчальному закладі з математики, фізики, кібернетики та ін.

Розповідають, що багато теорем львівські математики доводили… у кав'ярні. С. Банах з учнями облюбували «Шкотську (шотландську) кав'ярню», де маленькі столики мали мармурове покриття — дуже зручне для запису математичних формул і теорем. Господар кав'ярні був незадоволений таким свавіллям науковців, але ситуацію врятувала дружина Банаха, яка придбала великий зошит для записів. Так з'явилася знаменита «Шкотська книга» — збірка математичних проблем, над якими працювала група С. Банаха. Як винагороду за розв'язання складних задач автори з гумором пропонували то кухлі пива, то вечерю в ресторані. Наприклад, одна з проблем, за яку автор пообіцяв живого гусака (1936 р.), була розв'язана лише в 1972 р., тоді ж і було вручено винагороду.

Проблеми, порушені в «Шкотській книзі», є настільки важливими та складними, що кожний, кому вдається розв'язати хоча б одну з них, одразу дістає світового визнання. Сама ж «Шкотська книга» є однією з найвідоміших і найцінніших реліквій світової науки.

**Вручення гусака**

# 4. Означення кореня $n$-го степеня. Функція $y = \sqrt[n]{x}$

Ви знаєте, що коренем другого степеня (квадратним коренем) із числа $a$ називають таке число, другий степінь якого дорівнює $a$. Аналогічно дають означення кореня $n$-го степеня із числа $a$, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

**Означення. Коренем $n$-го степеня із числа $a$, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають таке число, $n$-й степінь якого дорівнює $a$.**

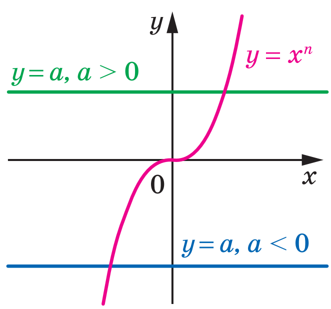
Наприклад, коренем п'ятого степеня із числа 32 є число 2, оскільки $2^5 = 32$; коренем третього степеня із числа $-64$ є число $-4$, оскільки $(-4)^3 = -64$; коренями четвертого степеня із числа 81 є числа 3 і $-3$, оскільки $3^4 = 81$ і $(-3)^4 = 81$.

З означення випливає, що будь-який корінь рівняння $x^n = a$, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, є коренем $n$-го степеня із числа $a$ і, навпаки, будь-який корінь $n$-го степеня із числа $a$ є коренем розглядуваного рівняння.

Якщо $n$ — непарне натуральне число, то функція $y = x^n$ є зростаючою, і, оскільки її областю значень є множина $\mathbb{R}$, то рівняння $x^n = a$ має єдиний корінь при будь-якому $a$.

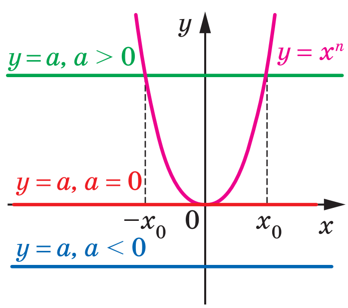
Рисунок 4.1 ілюструє останнє твердження: при будь-якому значенні $a$ графіки функцій $y = x^n$ і $y = a$ мають одну спільну точку. Тоді можна зробити такий висновок:

***якщо $n$ — непарне натуральне число, більше за 1, то з будь-якого числа існує корінь $n$-го степеня, причому тільки один.***




$n$ — непарне натуральне число, $n > 1$

**Рис. 4.1**




$n$ — парне натуральне число

**Рис. 4.2**

Корінь непарного степеня $n$, $n > 1$, із числа $a$ позначають так: $\sqrt[n]{a}$ (читають: «корінь $n$-го степеня з $a$»). Знак $\sqrt[n]{\phantom{a}}$ називають **знаком кореня $n$-го степеня** або **радикалом**. Вираз, який стоїть під радикалом, називають **підкореневим виразом**.

Наприклад, $\sqrt[5]{32} = 2$, $\sqrt[3]{-64} = -4$, $\sqrt[7]{0} = 0$.

Корінь третього степеня прийнято називати також **кубічним коренем**. Наприклад, запис $\sqrt[3]{2}$ читають: «корінь кубічний із числа 2».

Наголосимо, що вираз $\sqrt[2k+1]{a}$, $k \in \mathbb{N}$, існує при будь-якому $a$.

З означення кореня $n$-го степеня випливає, що ***при будь-якому $a$ виконується рівність***

$$\boxed{\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = a}$$

Наприклад, $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2$, $\left(\sqrt[7]{-0{,}1}\right)^7 = -0{,}1$.

Розглянемо рівняння $x^n = a$, де $n$ — парне натуральне число.

Оскільки областю значень функції $y = x^n$, де $n$ — парне натуральне число, є множина $[0; +\infty)$, то при $a < 0$ дане рівняння не має розв'язків.

Очевидно, що при $a = 0$ рівняння має єдиний корінь $x = 0$.

Функція $y = x^n$, де $n$ — парне натуральне число, зростає на проміжку $[0; +\infty)$ і набуває всіх додатних значень. Отже, при $a \geqslant 0$ рівняння $x^n = a$, де $n$ — парне натуральне число, на проміжку $[0; +\infty)$ має єдиний корінь.

Оскільки розглядувана функція є парною, то при $a > 0$ дане рівняння має два корені, які є протилежними числами.

Наведені твердження мають просту геометричну інтерпретацію (рис. 4.2). Якщо $a < 0$, то графіки функцій $y = x^n$ і $y = a$ не мають спільних точок; якщо $a = 0$, то розглядувані графіки мають одну спільну точку; якщо $a > 0$, то спільних точок дві, причому їхні абсциси — протилежні числа.

Тепер можна зробити такий висновок:

***якщо $n$ — парне натуральне число, то при $a < 0$ корінь $n$-го степеня із числа $a$ не існує; при $a = 0$ корінь $n$-го степеня із числа $a$ дорівнює 0; при $a > 0$ існують два протилежних числа, які є коренями $n$-го степеня із числа $a$.***

Вище було встановлено, що рівняння $x^n = a$ при $a \geqslant 0$ обов'язково має один невід'ємний корінь. Його називають **арифметичним коренем $n$-го степеня із числа $a$**.

**Означення. Арифметичним коренем $n$-го степеня з невід'ємного числа $a$, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають таке невід'ємне число, $n$-й степінь якого дорівнює $a$.**

Арифметичний корінь $n$-го степеня з невід'ємного числа $a$ позначають так: $\sqrt[n]{a}$.

Наприклад, $\sqrt[4]{81} = 3$, оскільки $3 \geqslant 0$ і $3^4 = 81$;

$\sqrt[6]{64} = 2$, оскільки $2 \geqslant 0$ і $2^6 = 64$;

$\sqrt[10]{0} = 0$, оскільки $0 \geqslant 0$ і $0^{10} = 0$.

Узагалі, **якщо $b \geqslant 0$ і $b^n = a$, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{a} = b$.**

Звернемо увагу на те, що для позначення арифметичного кореня $n$-го степеня з невід'ємного числа $a$ та кореня непарного степеня $n$ із числа $a$ використовують один і той самий запис: $\sqrt[n]{a}$. Запис $\sqrt[2k]{a}$, $k \in \mathbb{N}$, використовують тільки для позначення арифметичного кореня. Зауважимо, що корінь парного степеня із числа $a$ не має позначення.

За допомогою знака кореня $n$-го степеня можна записувати корені рівняння $x^n = a$, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

- Якщо $n$ — непарне натуральне число, то при будь-якому значенні $a$ розглядуване рівняння має єдиний корінь $x = \sqrt[n]{a}$.
- Якщо $n$ — парне натуральне число і $a > 0$, то рівняння має два корені: $x_1 = \sqrt[n]{a}$, $x_2 = -\sqrt[n]{a}$.
- Якщо $a = 0$, то $x = 0$.

Наприклад, коренем рівняння $x^3 = 7$ є число $\sqrt[3]{7}$; коренями рівняння $x^4 = 5$ є два числа: $-\sqrt[4]{5}$ і $\sqrt[4]{5}$.

З означення арифметичного кореня $n$-го степеня випливає, що:

**1) $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$, де $b \geqslant 0$;**

**2) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, де $a \geqslant 0$.**

Наприклад, $\left(\sqrt[6]{7}\right)^6 = 7$.

Покажемо, що при будь-якому $a$ і $k \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}}$$

Для того щоб довести рівність $\sqrt[2k+1]{x} = y$, потрібно показати, що $y^{2k+1} = x$.

Маємо: $\left(-\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = -\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = -a$.

Доведена властивість дає змогу корінь непарного степеня з від’ємного числа виразити через арифметичний корінь.

Наприклад, $\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{-12} = -\sqrt[5]{12}$.

Вище було встановлено, що корінь непарного степеня з будь-якого числа існує та набуває єдиного значення. Отже, кожному числу $x \in \mathbb{R}$ можна поставити у відповідність єдине число $y$ таке, що $y = \sqrt[2k+1]{x}$. Зазначене правило задає функцію $f(x) = \sqrt[2k+1]{x}$, де $k \in \mathbb{N}$, з областю визначення $\mathbb{R}$.

Покажемо, що функція $f$ є оберненою до функції $g(x) = x^{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$.

Оскільки рівняння $\sqrt[2k+1]{x} = a$ при будь-якому $a$ має корінь (а саме, число $a^{2k+1}$), то областю значень функції $f$ є множина $\mathbb{R}$.

Маємо: $D(f) = E(g) = \mathbb{R}$,

$E(f) = D(g) = \mathbb{R}$.

Для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $\left(\sqrt[2k+1]{x}\right)^{2k+1} = x$. Іншими словами, $g(f(x)) = x$ для всіх $x \in D(f)$. Сказане означає, що $f$ і $g$ — взаємно обернені функції.

Використовуючи графік функції $y = x^{2k+1}$ і теорему 3.2, можна побудувати графік функції $y = \sqrt[2k+1]{x}$ (рис. 4.3). Зокрема, на рисунку 4.4 зображено графіки функцій $y = \sqrt[3]{x}$ і $y = \sqrt[5]{x}$.

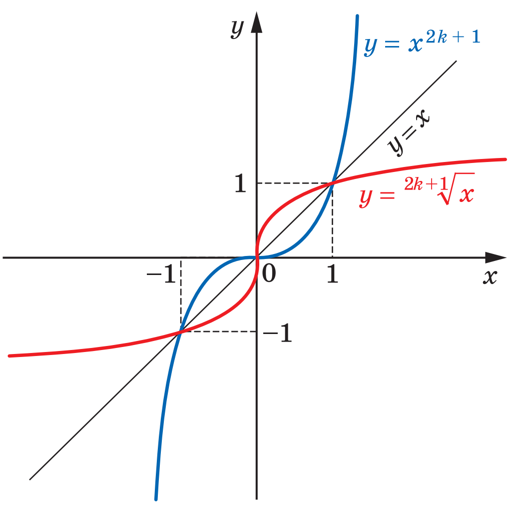



**Рис. 4.3**

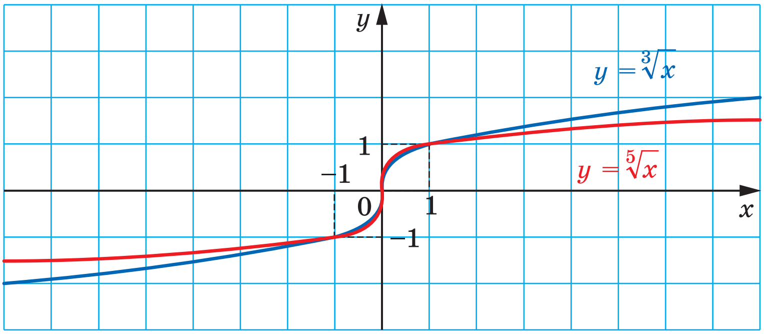



**Рис. 4.4**

Оскільки функція $g(x) = x^{2k+1}$ є зростаючою, то за теоремою 3.3 функція $f(x) = \sqrt[2k+1]{x}$ також є зростаючою.

Функція $f(x) = \sqrt[2k+1]{x}$ має єдиний нуль $x = 0$.

Якщо $x < 0$, то $f(x) < 0$; якщо $x > 0$, то $f(x) > 0$. Отже, проміжки $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ є проміжками знакосталості функції $f$.

Для будь-якого $x$ із області визначення функції $f$ виконуються рівності $f(-x) = \sqrt[2k+1]{-x} = -\sqrt[2k+1]{x} == -f(x)$. Отже, функція $f$ є непарною.

Аналогічно дають означення функції $f(x) = \sqrt[2k]{x}$, $k \in \mathbb{N}$, з областю визначення $[0; +\infty)$.

Покажемо, що функція $f$ є оберненою до функції $g(x) = x^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, з областю визначення $[0; +\infty)$.

Оскільки рівняння $\sqrt[2k]{x} = a$ при будь-якому $a \geqslant 0$ має корінь (а саме, число $a^{2k}$) і при будь-якому $a < 0$ не має коренів, то областю значень функції $f$ є проміжок $[0; +\infty)$.

Маємо: $D(f) = E(g) = [0; +\infty)$,

$E(f) = D(g) = [0; +\infty)$.

Для будь-якого $x \in [0; +\infty)$ виконується рівність $\left(\sqrt[2k]{x}\right)^{2k} = x$. Іншими словами, $g(f(x)) = x$ для всіх $x \in D(f)$. Сказане означає, що $f$ і $g$ — взаємно обернені функції.

На рисунку 4.5 показано, як за допомогою графіка функції $y = x^{2k}$, де $x \geqslant 0$, побудувати графік функції $y = \sqrt[2k]{x}$, $k \in \mathbb{N}$.

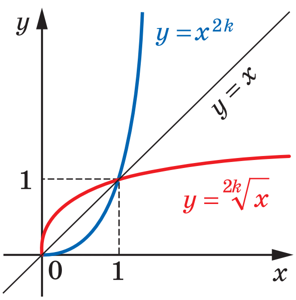



**Рис. 4.5**

На рисунку 4.6 зображено графік функції $y = \sqrt[4]{x}$.

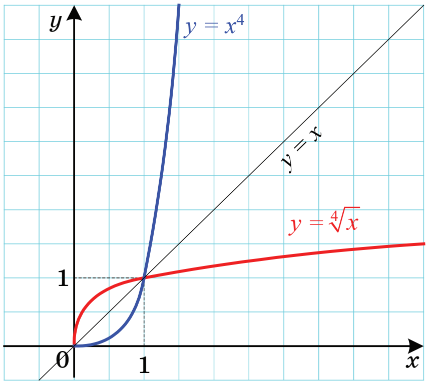



**Рис. 4.6**

З'ясуємо деякі властивості функції $f(x) = \sqrt[2k]{x}$ .

Оскільки функція $g(x) = x^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, $D(g) = [0; +\infty)$, є зростаючою, то функція $f(x) = \sqrt[2k]{x}$ також є зростаючою.

Функція $f$ має єдиний нуль $x = 0$.

Якщо $x > 0$, то $f(x) > 0$. Отже, проміжок $(0; +\infty)$ є проміжком знакосталості функції $f$.

Оскільки область визначення функції $f$ не є симетричною відносно початку координат, то функція $f$ не є ні парною, ні непарною.

**ПРИКЛАД 1** Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt[3]{x} < 2$; 2) $\sqrt[4]{x-2} < 1$; 3) $\sqrt[6]{x^2-4} > \sqrt[6]{3x}$.

*Розв'язання.* 1) Дана нерівність рівносильна такій: $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{8}$. Оскільки функція $y = \sqrt[3]{x}$ є зростаючою, то можна зробити висновок, що $x < 8$.

*Відповідь*: $(-\infty; 8)$.

2) Маємо: $\sqrt[4]{x-2} < \sqrt[4]{1}$. Оскільки функція $y = \sqrt[4]{t}$ є зростаючою з областю визначення $[0; +\infty)$, то дана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} x - 2 < 1, \\ x - 2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Звідси $2 \leqslant x < 3$.

*Відповідь*: $[2; 3)$.

3) Дана нерівність рівносильна системі $\begin{cases} x^2 - 4 > 3x, \\ 3x \geqslant 0. \end{cases}$

Тоді $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 > 0, \\ x \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -1, \\ x > 4, \end{array}\right. \\ x \geqslant 0. \end{cases}$ Звідси отримуємо, що $x > 4$.

*Відповідь*: $(4; +\infty)$. ◄

**ПРИКЛАД 2** Порівняйте $\sqrt[3]{2}$ і $\sqrt[4]{2}$.

*Розв'язання.* Маємо: $\sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[12]{16}$; $\sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[12]{8}$.

Оскільки функція $y = \sqrt[12]{x}$ є зростаючою, то $\sqrt[12]{16} > \sqrt[12]{8}$.

*Відповідь*: $\sqrt[3]{2} > \sqrt[4]{2}$. ◄

## ВПРАВИ

**4.1.**° Обчисліть:

1) $\left(-\sqrt[7]{2}\right)^7$; 2) $-\sqrt[4]{7^4}$; 3) $\left(\frac{1}{2}\sqrt[6]{48}\right)^6$; 4) $\frac{1}{2}\sqrt[6]{48^6}$.

**4.2.**° Знайдіть значення виразу:

1) $\left(-\sqrt[6]{11}\right)^6$; 2) $\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{45}\right)^3$; 3) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{45^3}$; 4) $\left(-2\sqrt[5]{-5}\right)^5$.

**4.3.**° Обчисліть:

1) $0{,}3\sqrt[3]{1000} - 5\sqrt[8]{256}$; 2) $\sqrt[5]{14^5} + \left(-2\sqrt{10}\right)^2 - \sqrt[7]{-128}$.

**4.4.**° Обчисліть:

1) $200\sqrt[3]{0{,}001} - \sqrt[5]{-0{,}00032}$; 2) $\sqrt[3]{8000} \cdot \sqrt[4]{7\frac{58}{81}} - \left(-\sqrt[5]{8}\right)^5 + \sqrt[7]{17^7}$.

**4.5.**° Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt[3]{x-1}$; 2) $y = \sqrt[4]{|x| - 1}$; 3) $y = \sqrt[6]{x^2(x-3)}$.

**4.6.**° Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt[4]{x-2}$; 2) $y = \sqrt[6]{x^2 - 4x + 3}$; 3) $y = \sqrt[10]{|x|(x-6)}$.

**4.7.**° Знайдіть область значень функції:

1) $y = \sqrt[6]{x} - 2$; 2) $y = \sqrt[3]{x} - 3$; 3) $y = \left|\sqrt[8]{x} - 1\right|$.

**4.8.**° Знайдіть область значень функції:

1) $y = \sqrt[4]{x} - 4$; 2) $y = \sqrt[5]{x} - 2$; 3) $y = \left|\sqrt[7]{x} + 1\right|$.

**4.9.**° Між якими двома послідовними цілими числами міститься на координатній прямій число:

1) $\sqrt[3]{3}$; 2) $\sqrt[4]{21}$; 3) $\sqrt[3]{100}$; 4) $-\sqrt[3]{81}$?

**4.10.°** Між якими двома послідовними цілими числами міститься на координатній прямій число:

1) $\sqrt[3]{18}$; 2) $\sqrt[4]{139}$; 3) $-\sqrt[3]{212}$?

**4.11.°** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^5 = 9$; 3) $x^6 = 5$; 5) $\sqrt[6]{x} = -2$;

2) $x^7 = -2$; 4) $\sqrt[4]{x} = 3$; 6) $\sqrt[3]{2x} + 7 = 0$.

**4.12.°** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^9 = 10$; 3) $x^6 = -64$; 5) $\sqrt[5]{x} = -2$;

2) $x^{10} = 9$; 4) $\sqrt[4]{x} = -2$; 6) $\sqrt[4]{3x-2} = 2$.

**4.13.°** Побудуйте графік функції:

1) $y = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3$; 2) $y = \left(\sqrt[4]{x}\right)^4$.

**4.14.•** Знайдіть область визначення виразу:

1) $\sqrt[4]{\dfrac{|x|-1}{x^2-9}}$; 2) $\sqrt[8]{6-|x|} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{3-x}}$.

**4.15.•** Знайдіть область визначення виразу:

1) $\sqrt[6]{\dfrac{|x|-4}{x^2-36}}$; 2) $\sqrt[10]{|x|-3} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{x+4}}$.

**4.16.•** Розв'яжіть рівняння:

1) $(x^2-4)\sqrt[4]{x+1} = 0$; 2) $(x-1)\sqrt[10]{x^2-2x-3} = 0$.

**4.17.•** Розв'яжіть рівняння:

1) $(|x|-3)\sqrt[6]{2-x} = 0$; 2) $(x+2)\sqrt[6]{x^2+2x-3} = 0$.

**4.18.•** Побудуйте графік функції:

1) $y = \left(\sqrt[4]{x-1}\right)^4 + \left(\sqrt[4]{1-x}\right)^4 + 1$; 2) $y = \left(\sqrt[6]{x}\right)^6 + \left(\sqrt[6]{1-x}\right)^6$.

**4.19.•** Побудуйте графік функції:

1) $y = x\left(\sqrt[4]{x}\right)^4$; 2) $y = \left(\sqrt[8]{2+x}\right)^8 + \left(\sqrt[6]{2-x}\right)^6$.

**4.20.•** Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = \sqrt[4]{|x|}$ на проміжку:

1) $[-3; -1]$; 2) $[-1; 2]$; 3) $[-3; +\infty)$.

**4.21.•** Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$ на проміжку:

1) $[2; 3]$; 2) $[-2; 1]$; 3) $(-\infty; 2)$.

**4.22.•** Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt[3]{3x+1} < 4$; 2) $\sqrt[8]{4x+1} \leqslant 1$; 3) $\sqrt[4]{x^2-8} > \sqrt[4]{2x}$.

**4.23.**$^{\bullet}$ Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt[10]{x+2} > 1$; 2) $\sqrt[4]{5x+1} < 3$; 3) $\sqrt[8]{x^2 - |x| + 1} > \sqrt[8]{5 - |x|}$.

**4.24.**$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що є ірраціональним число: 1) $\sqrt[3]{2}$; 2) $\sqrt[6]{6}$.

**4.25.**$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що є ірраціональним число: 1) $\sqrt[3]{7}$; 2) $\sqrt[4]{12}$.

**4.26.**$^{\bullet\bullet}$ Скільки коренів має рівняння залежно від значення параметра $a$:

1) $\sqrt[3]{x} = a - x$; 2) $\sqrt[4]{x} = a - x$?

**4.27.**$^{\bullet\bullet}$ Скільки коренів має рівняння $\left|\sqrt[6]{x} - 1\right| = a$ залежно від значення параметра $a$?

**4.28.**$^{\bullet\bullet}$ Залежно від значення параметра $a$ визначте кількість коренів рівняння:

1) $(x-a)\sqrt[4]{x+1} = 0$; 3) $(x-a)\left(\sqrt[4]{x} - 1\right) = 0$.

2) $(x-a)\left(\sqrt[4]{x} + 1\right) = 0$;

**4.29.**$^{\bullet\bullet}$ Залежно від значення параметра $a$ визначте кількість коренів рівняння:

1) $(x+1)\sqrt[4]{x-a} = 0$; 2) $(x-1)\left(\sqrt[4]{x} - a\right) = 0$.

**4.30.**$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння $\sqrt[4]{x-26} + \sqrt[3]{x} = 4$.

**4.31.**$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{x-9} + \sqrt[4]{x+6} = 3$.

**4.32.**$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x + \sqrt[6]{x} = y + \sqrt[6]{y}, \\ x^2 + xy + y^2 = 27. \end{cases}$

**4.33.**$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x + \sqrt[5]{x} = y + \sqrt[5]{y}, \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$

**4.34.**$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть усі парні функції $f$ такі, що рівність $f(x^{30}) = x^3$ виконується для всіх $x \in [0; +\infty)$.

**4.35.**$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть усі непарні функції $f$ такі, що рівність $f(\sqrt[8]{x}) = \sqrt[5]{x}$ виконується для всіх $x \in [0; +\infty)$.

**4.36.**$^{*}$ Знайдіть усі визначені на $\mathbb{R}$ функції $f$ такі, що рівність $f(x^8) = x^2$ виконується для всіх $x \in \mathbb{R}$.

**4.37.**$^{*}$ Знайдіть цілу частину числа $\underbrace{\sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{\ldots + \sqrt[3]{24}}}}}_{\text{100 радикалів}}$.

**4.38.**$^{*}$ Знайдіть цілу частину числа $\underbrace{\sqrt[4]{12 + \sqrt[4]{12 + \sqrt[4]{\ldots + \sqrt[4]{12}}}}}_{\text{200 радикалів}}$.

**4.39.*** Розв'яжіть рівняння $a^5 + x = \sqrt[5]{a - x}$.

**4.40.*** Для $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ позначимо $X = \left[\sqrt[k]{1}\right] + \left[\sqrt[k]{2}\right] + \ldots + \left[\sqrt[k]{n^k}\right]$, $Y = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$. Доведіть, що $X + Y = n^{k+1} + n$.

**4.41.*** Для невід'ємних чисел $a$, $b$ і $c$ доведіть нерівність $\sqrt{a + \sqrt[3]{b + \sqrt[4]{c}}} \geqslant \sqrt[32]{abc}$.

## 5. Властивості кореня $n$-го степеня

Розглянемо теореми, які виражають властивості кореня $n$-го степеня.

**Теорема 5.1 (перша теорема про корінь із степеня).** ***Для будь-якого $a \in \mathbb{R}$ і $k \in \mathbb{N}$ виконуються рівності:***

$$\boxed{\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a}$$

$$\boxed{\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|}$$

*Доведення.* Щоб довести рівність $\sqrt[2k+1]{x} = y$, достатньо показати, що $y^{2k+1} = x$. Для першої рівності, що доводиться, $x = a^{2k+1}$, а $y = a$. Звідси рівність $y^{2k+1} = x$ є очевидною.

Щоб довести рівність $\sqrt[2k]{x} = y$, достатньо показати, що $y \geqslant 0$ і $y^{2k} = x$. Для другої рівності, що доводиться, маємо: $|a| \geqslant 0$ і $(|a|)^{2k} = a^{2k}$. ◄

**Теорема 5.2 (корінь з добутку).** ***Якщо $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то***

$$\boxed{\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}$$

*Доведення.* Для того щоб довести рівність $\sqrt[n]{x} = y$, де $x \geqslant 0$, достатньо показати, що $y \geqslant 0$ і $y^n = x$.

Маємо: $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$ і $\sqrt[n]{b} \geqslant 0$. Тоді $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geqslant 0$. Крім того, $\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$. ◄

Використовуючи теорему 5.2, можна показати, що коли $a \leqslant 0$ і $b \leqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{-a} \cdot \sqrt[n]{-b}$.

**Теорема 5.3 (корінь із частки).** ***Якщо $a \geqslant 0$ і $b > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то***

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

Доведіть цю теорему самостійно.

Зауважимо, що коли $a \leqslant 0$ і $b < 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{-a}}{\sqrt[n]{-b}}$.

**Теорема 5.4 (степінь кореня).** ***Якщо $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то***

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}}$$

*Доведення.* Якщо $k = 1$, то рівність, що доводиться, є очевидною.

Нехай $k > 1$.

Маємо: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a}}_{k \text{ множників}} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ множників}}} = \sqrt[n]{a^k}$. ◄

**Теорема 5.5 (корінь з кореня).** ***Якщо $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $k > 1$, то***

$$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}}$$

*Доведення.* Маємо: $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} \geqslant 0$.

Крім того, $\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right)^k = \left(\sqrt[k]{a}\right)^k = a$. ◄

**Теорема 5.6 (друга теорема про корінь із степеня).** ***Якщо $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то***

$$\boxed{\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}}$$

*Доведення.* Якщо $k = 1$, то рівність, що доводиться, є очевидною.

Нехай $k > 1$. Маємо: $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a^k}} = \sqrt[n]{a}$. ◄

**ПРИКЛАД 1** Спростіть вираз: 1) $\sqrt[12]{a^3}$; 2) $\sqrt[4]{a^{12}}$; 3) $\sqrt[6]{a^2}$; 4) $\sqrt[6]{x^6 y^6}$, якщо $x \geqslant 0$ і $y \leqslant 0$.

*Розв'язання.* Застосуємо теореми 5.5 і 5.1.

1) З умови випливає, що $a \geqslant 0$. Тоді $\sqrt[12]{a^3} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^3}} = \sqrt[4]{a}$.

2) $\sqrt[4]{a^{12}} = \sqrt[4]{(a^3)^4} = |a^3|$.

3) $\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{\sqrt{a^2}} = \sqrt[3]{|a|}$.

4) Ураховуючи, що $x \geqslant 0$ і $y \leqslant 0$, можна записати:

$$\sqrt[6]{x^6y^6} = \sqrt[6]{(xy)^6} = |xy| = |x||y| = x(-y) = -xy. \blacktriangleleft$$

**ПРИКЛАД 2** Винесіть множник з-під знака кореня: 1) $\sqrt[8]{b^{43}}$; 2) $\sqrt[8]{-b^{43}}$; 3) $\sqrt[6]{a^6b^7}$, якщо $a < 0$.

*Розв'язання.* 1) З умови випливає, що $b \geqslant 0$.

$$\text{Тоді } \sqrt[8]{b^{43}} = \sqrt[8]{b^{40}b^3} = |b^5|\sqrt[8]{b^3} = b^5 \cdot \sqrt[8]{b^3}.$$

2) З умови випливає, що $b \leqslant 0$. Тоді

$$\sqrt[8]{-b^{43}} = \sqrt[8]{b^{40}(-b)^3} = |b^5|\sqrt[8]{-b^3} = -b^5 \cdot \sqrt[8]{-b^3}.$$

3) З умови випливає, що $b \geqslant 0$.

$$\text{Тоді } \sqrt[6]{a^6b^7} = \sqrt[6]{a^6b^6b} = |a||b|\sqrt[6]{b} = -ab\sqrt[6]{b}. \blacktriangleleft$$

**ПРИКЛАД 3** Внесіть множник під знак кореня: 1) $-2\sqrt[6]{3}$; 2) $a\sqrt[4]{7}$; 3) $c\sqrt[10]{c^7}$; 4) $3b\sqrt[4]{-\frac{b}{3}}$.

*Розв'язання.* 1) $-2\sqrt[6]{3} = -\sqrt[6]{64} \cdot \sqrt[6]{3} = -\sqrt[6]{192}$.

2) Якщо $a \geqslant 0$, то $a\sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{7a^4}$; якщо $a < 0$, то $a\sqrt[4]{7} = -\sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{7} = -\sqrt[4]{7a^4}$.

3) З умови випливає, що $c \geqslant 0$. Тоді $c\sqrt[10]{c^7} = \sqrt[10]{c^{10}} \cdot \sqrt[10]{c^7} = \sqrt[10]{c^{17}}$.

4) З умови випливає, що $b \leqslant 0$. Тоді

$$3b\sqrt[4]{-\frac{b}{3}} = -\sqrt[4]{81b^4} \cdot \sqrt[4]{-\frac{b}{3}} = -\sqrt[4]{81b^4 \cdot \left(-\frac{b}{3}\right)} = -\sqrt[4]{-27b^5}. \blacktriangleleft$$

**ПРИКЛАД 4** Скоротіть дріб $\frac{\sqrt[3]{b}-1}{\sqrt[6]{b}+1}$.

*Розв'язання.* Розклавши чисельник даного дробу на множники, отримуємо:

$$\frac{\sqrt[3]{b}-1}{\sqrt[6]{b}+1} = \frac{\left(\sqrt[6]{b}\right)^2-1}{\sqrt[6]{b}+1} = \frac{\left(\sqrt[6]{b}-1\right)\left(\sqrt[6]{b}+1\right)}{\sqrt[6]{b}+1} = \sqrt[6]{b}-1. \blacktriangleleft$$

**ПРИКЛАД 5** Скоротіть дріб $\dfrac{\sqrt[10]{ab}+\sqrt[5]{b}}{\sqrt[10]{ab}}$.

*Розв'язання.* З умови випливає, що числа $a$ і $b$ однакового знака. Розглянемо два випадки.

Перший випадок: $a > 0$ і $b > 0$. Маємо:

$$\frac{\sqrt[10]{ab}+\sqrt[5]{b}}{\sqrt[10]{ab}}=\frac{\sqrt[10]{a}\cdot\sqrt[10]{b}+\sqrt[10]{b}\cdot\sqrt[10]{b}}{\sqrt[10]{a}\cdot\sqrt[10]{b}}=\frac{\sqrt[10]{b}\left(\sqrt[10]{a}+\sqrt[10]{b}\right)}{\sqrt[10]{a}\cdot\sqrt[10]{b}}=\frac{\sqrt[10]{a}+\sqrt[10]{b}}{\sqrt[10]{a}}.$$

Другий випадок: $a < 0$, $b < 0$. Маємо:

$$\frac{\sqrt[10]{ab}+\sqrt[5]{b}}{\sqrt[10]{ab}}=\frac{\sqrt[10]{-a}\cdot\sqrt[10]{-b}-\left(\sqrt[10]{-b}\right)^2}{\sqrt[10]{-a}\cdot\sqrt[10]{-b}}=\frac{\sqrt[10]{-b}\left(\sqrt[10]{-a}-\sqrt[10]{-b}\right)}{\sqrt[10]{-a}\cdot\sqrt[10]{-b}}=\frac{\sqrt[10]{-a}-\sqrt[10]{-b}}{\sqrt[10]{-a}}.$$

Випадок, коли $a < 0$ і $b < 0$, можна розглянути інакше. Нехай $a=-x$, $b=-y$, де $x > 0$, $y > 0$. Маємо:

$$\frac{\sqrt[10]{ab}+\sqrt[5]{b}}{\sqrt[10]{ab}}=\frac{\sqrt[10]{xy}+\sqrt[5]{-y}}{\sqrt[10]{xy}}=\frac{\sqrt[10]{x}\cdot\sqrt[10]{y}-\sqrt[10]{y}\cdot\sqrt[10]{y}}{\sqrt[10]{xy}}=$$

$$=\frac{\sqrt[10]{y}\left(\sqrt[10]{x}-\sqrt[10]{y}\right)}{\sqrt[10]{x}\cdot\sqrt[10]{y}}=\frac{\sqrt[10]{x}-\sqrt[10]{y}}{\sqrt[10]{x}}=\frac{\sqrt[10]{-a}-\sqrt[10]{-b}}{\sqrt[10]{-a}}.$$ ◀

**ПРИКЛАД 6** Доведіть, що $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3$.

*Розв'язання.* Нехай $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=x$. Скористаємося тим, що $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab\,(a+b)$.

Маємо:

$$x^3=9+\sqrt{80}+9-\sqrt{80}+3\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\cdot\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\cdot\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right).$$

Звідси $x^3=18+3x$; $x^3-3x-18=0$.

Розглянувши дільники числа 18, нескладно установити, що $x=3$ є коренем даного рівняння. Поділивши многочлен $x^3-3x-18$ на двочлен $x-3$, отримуємо: $x^2+3x+6$.

Маємо: $(x-3)(x^2+3x+6)=0$.

Це рівняння має єдиний корінь $x=3$. ◀

## ВПРАВИ

**5.1.°** Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}$; 2) $\dfrac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{128}}$; 3) $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}\cdot\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$.

**5.2.°** Чому дорівнює значення виразу:

1) $\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{5}$; 2) $\dfrac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$; 3) $\sqrt[5]{2\sqrt{17}+10}\cdot\sqrt[5]{2\sqrt{17}-10}$?

**5.3.°** Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[4]{162}$; 2) $\sqrt[3]{250}$; 3) $\sqrt[3]{-a^7}$; 4) $\sqrt[3]{-54a^5b^9}$.

**5.4.°** Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[4]{80}$; 2) $\sqrt[3]{432}$; 3) $\sqrt[3]{54y^8}$; 4) $\sqrt[4]{243b^9c^{18}}$.

**5.5.°** Внесіть множник під знак кореня:

1) $4\sqrt[3]{5}$; 2) $-10\sqrt[4]{0{,}271}$; 3) $5\sqrt[3]{0{,}04x}$; 4) $b\sqrt[5]{3b^3}$.

**5.6.°** Внесіть множник під знак кореня:

1) $0{,}25\sqrt[3]{320}$; 2) $2\sqrt[4]{7}$; 3) $5\sqrt[4]{4a}$; 4) $2x^3\sqrt[5]{0{,}25x^3}$.

**5.7.°** Спростіть вираз:

1) $\sqrt[3]{3\sqrt[3]{2}}$; 2) $\sqrt[5]{b\sqrt[6]{b}}$; 3) $\sqrt[8]{x^3\sqrt[3]{x^7}}$; 4) $\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$.

**5.8.°** Спростіть вираз:

1) $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt[3]{b\sqrt[4]{b}}$; 3) $\sqrt[5]{x^2\sqrt[6]{x^{13}}}$; 4) $\sqrt[4]{a\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}}$.

**5.9.°** Спростіть вираз:

1) $\left(1+\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}\right)\left(1-\sqrt[3]{a}\right)$; 2) $\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1-\sqrt[4]{a}\right)$.

**5.10.°** Спростіть вираз $\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n}\right)\left(\sqrt[8]{m}+\sqrt[8]{n}\right)\left(\sqrt[8]{m}-\sqrt[8]{n}\right)$.

**5.11.°** Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$; 3) $\dfrac{\sqrt[8]{ab^2}-\sqrt[8]{a^2b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$; 5) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b}}$;

2) $\dfrac{\sqrt[6]{x}-9}{\sqrt[12]{x}+3}$; 4) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16}{x-64}$; 6) $\dfrac{2-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}$.

**5.12.°** Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{\sqrt[6]{a}+1}{\sqrt[3]{a}-1}$; 3) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$; 5) $\dfrac{\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{a^2b}}$;

2) $\dfrac{\sqrt{m}-\sqrt[4]{mn}}{\sqrt[4]{mn}-\sqrt{n}}$; 4) $\dfrac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$; 6) $\dfrac{3+\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3}}$.

**5.13.•** При яких значеннях $a$ виконується рівність:

1) $\sqrt[3]{(a-5)^4}=\left(\sqrt[3]{a-5}\right)^4$; 3) $\sqrt[6]{a(a-1)}=\sqrt[6]{a}\,\sqrt[6]{(1-a)}$;

2) $\sqrt[4]{(a-2)^4}=\left(\sqrt[4]{a-2}\right)^4$; 4) $\sqrt[12]{a-2}\,\sqrt[12]{3-a}=\sqrt[12]{(2-a)(a-3)}$?

**5.14.**° При яких значеннях $a$ виконується рівність:

1) $\sqrt[6]{a^{30}} = a^5$; 2) $\sqrt[6]{a^{30}} = -a^5$; 3) $\sqrt[4]{a^4} = \left(\sqrt[4]{a}\right)^4$; 4) $\sqrt[4]{a^4} = \left(\sqrt[4]{-a}\right)^4$?

**5.15.**° При яких значеннях $a$ і $b$ виконується рівність:

1) $\sqrt[4]{ab} = \sqrt[4]{-a} \cdot \sqrt[4]{-b}$; 2) $\sqrt[4]{-ab} = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{-b}$; 3) $\sqrt[5]{ab} = \sqrt[5]{-a} \cdot \sqrt[5]{-b}$?

**5.16.**° При яких значеннях $x$ виконується рівність:

1) $\sqrt[4]{x^2 - 4} = \sqrt[4]{x-2} \cdot \sqrt[4]{x+2}$; 2) $\sqrt[8]{(x-3)(7-x)} = \sqrt[8]{x-3} \cdot \sqrt[8]{7-x}$?

**5.17.**° Спростіть вираз:

1) $\sqrt[8]{256k^8}$, якщо $k \leqslant 0$;

2) $\sqrt[6]{c^{24}}$;

3) $\sqrt[4]{81x^8y^4}$, якщо $y \geqslant 0$;

4) $-1{,}2x\sqrt[6]{64x^{30}}$, якщо $x \leqslant 0$.

**5.18.**° Спростіть вираз:

1) $\sqrt[4]{625a^{24}}$;

2) $\sqrt[4]{0{,}0001b^{20}}$, якщо $b \geqslant 0$;

3) $\sqrt[10]{p^{30}q^{40}}$, якщо $p \geqslant 0$;

4) $\sqrt[12]{m^{36}n^{60}}$, якщо $m \leqslant 0$, $n \leqslant 0$.

**5.19.**° Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[4]{-m^9}$;

2) $\sqrt[4]{32m^{18}n^{17}}$;

3) $\sqrt[4]{a^8b^{13}}$, якщо $a > 0$;

4) $\sqrt[6]{x^6y^7}$, якщо $x \neq 0$;

5) $\sqrt[4]{a^{15}b^{15}}$;

6) $\sqrt[8]{-a^{25}b^{50}}$.

**5.20.**° Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[4]{32a^6}$, якщо $a \leqslant 0$;

2) $\sqrt[4]{-625a^5}$;

3) $\sqrt[6]{a^7b^7}$, якщо $a < 0$, $b < 0$;

4) $\sqrt[6]{a^{20}b^{19}}$, якщо $a > 0$.

**5.21.**° Внесіть множник під знак кореня:

1) $a\sqrt[4]{2}$, якщо $a \geqslant 0$;

2) $mn\sqrt[4]{\dfrac{1}{m^3n^3}}$;

3) $ab\sqrt[6]{\dfrac{6}{a^3b^2}}$, якщо $a > 0$, $b < 0$;

4) $ab\sqrt[4]{ab^2}$, якщо $b \leqslant 0$;

5) $b\sqrt[6]{6}$;

6) $a\sqrt[6]{-a}$.

**5.22.**° Внесіть множник під знак кореня:

1) $c\sqrt[8]{3}$, якщо $c \leqslant 0$; 2) $a\sqrt[6]{a}$; 3) $ab\sqrt[8]{\dfrac{3}{a^4b^5}}$, якщо $a < 0$; 4) $a\sqrt[4]{-a^3}$.

**5.23.**° Доведіть, що значення виразу є цілим числом:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1^2} + \sqrt[3]{1 \cdot 2} + \sqrt[3]{2^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2 \cdot 3} + \sqrt[3]{3^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{999^2} + \sqrt[3]{999 \cdot 1000} + \sqrt[3]{1000^2}}.$$

**5.24.**° Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[3]{\sqrt{10} - 3} \cdot \sqrt[6]{19 + 6\sqrt{10}}$; 2) $\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{6 - 4\sqrt{2}}$.

**5.25.**• Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[6]{7-4\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt{2\sqrt{6}-1}\cdot\sqrt[4]{25+4\sqrt{6}}$.

**5.26.**• Побудуйте графік функції:

1) $y=2x+\sqrt[6]{x^6}$; 2) $y=\sqrt[4]{x^2}\cdot\sqrt[4]{x^2}$; 3) $y=\sqrt[6]{x^3}\cdot\sqrt[6]{x^9}$.

**5.27.**• Побудуйте графік функції:

1) $y=\sqrt[8]{x^8}-2x$; 2) $y=\sqrt[4]{-x}\cdot\sqrt[4]{-x^3}$; 3) $y=\dfrac{\sqrt[6]{x^6}}{x}$.

**5.28.**• Розв'яжіть рівняння $\sqrt[4]{(x-3)^4}+\sqrt[6]{(5-x)^6}=2$.

**5.29.**• Побудуйте графік функції $y=\sqrt[8]{(x+1)^8}+\sqrt{(x-3)^2}$.

**5.30.**• Спростіть вираз:

1) $\left(\dfrac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x}-1}-\dfrac{4\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}-1}\right)\cdot\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}-1}$;

2) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}+1\right)$;

3) $\dfrac{\sqrt[3]{2a+2\sqrt{a^2-1}}}{\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}}+\dfrac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}+2}}$.

**5.31.**• Доведіть тотожність:

1) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[6]{x}+1}-\dfrac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[3]{x}}\right):\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}+1}=\dfrac{\sqrt[6]{x}+1}{x}$;

2) $\dfrac{\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{ab^2}-\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}=\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}$;

3) $\dfrac{\sqrt[3]{m+4\sqrt{m-4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{m-4}+2}}{\sqrt[3]{m-4\sqrt{m-4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{m-4}-2}}\cdot\dfrac{m-4\sqrt{m-4}}{m-8}=1$.

**5.32.**•• Доведіть, що значення виразу є раціональним числом:

1) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}-\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$.

**5.33.**•• Доведіть, що $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

**5.34.**•• Спростіть вираз $\left(\sqrt[32]{2}+1\right)\left(\sqrt[16]{2}+1\right)\left(\sqrt[8]{2}+1\right)\left(\sqrt[4]{2}+1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)$.

**5.35.**•• Спростіть вираз $\left(\sqrt[64]{a}+1\right)\left(\sqrt[32]{a}+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sqrt{a}+1\right)$.

**5.36.**•• Спростіть вираз $\sqrt[15]{3^{14}}+\sqrt[15]{3^{13}\cdot2}+\sqrt[15]{3^{12}\cdot2^2}+\ldots+\sqrt[15]{2^{14}}$.

**5.37.**•• Спростіть вираз $\sqrt[17]{3^{16}}-\sqrt[17]{3^{15}\cdot2}+\sqrt[17]{3^{14}\cdot2^2}-\ldots+\sqrt[17]{2^{16}}$.

**5.38.*** Наведіть приклад такого многочлена із цілими коефіцієнтами, що число $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$ є його коренем.

**5.39.*** Доведіть, що число $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}$ є ірраціональним.

**5.40.*** Доведіть рівність

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2+\sqrt{6}}}}}}_{10\ \text{радикалів}} = \sqrt[1024]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[1024]{2-\sqrt{3}}.$$

# 6. Степінь з раціональним показником та його властивості

Нагадаємо означення степеня з натуральним показником:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{множників}},\ \ n \in \mathbb{N},\ \ n > 1;$$

$$a^1 = a.$$

Ви знаєте, що степінь з натуральним показником має такі властивості:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

2) $a^m : a^n = a^{m-n}$, $a \neq 0$, $m > n$;

3) $(a^m)^n = a^{mn}$;

4) $(ab)^n = a^n b^n$;

5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$.

Пізніше ви ознайомилися з означеннями степеня з нульовим показником і степеня із цілим від'ємним показником:

$$a^0 = 1,\ a \neq 0;$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ \ a \neq 0,\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Ці означення дуже вдалі: при такому підході всі п'ять властивостей степеня з натуральним показником залишилися справедливими й для степеня із цілим показником.

Введемо поняття степеня з дробовим показником, тобто степеня $a^r$, показник якого є раціональним числом виду $r = \dfrac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Бажано це зробити так, щоб степеню з дробовим показником залишилися притаманними всі властивості степеня із цілим показником. Підказкою для потрібного означення може слугувати такий приклад.

Позначимо через $x$ шукане значення степеня $2^{\frac{2}{3}}$. Ураховуючи властивість $(a^m)^n = a^{mn}$, можна записати: $x^3 = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 2^2$. Отже, $x$ — це кубічний корінь із числа $2^2$, тобто $x = \sqrt[3]{2^2}$. Таким чином, $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$.

Ці міркування підказують, що доцільно прийняти таке означення.

**Означення. Степенем додатного числа $a$ з раціональним показником $r$, поданим у вигляді $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають число $\sqrt[n]{a^m}$, тобто**

$$\boxed{a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Наприклад, $5^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{5^3}$, $3^{-\frac{1}{5}} = 3^{\frac{-1}{5}} = \sqrt[5]{3^{-1}}$, $0{,}4^{0{,}3} = 0{,}4^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{0{,}4^3}$.

Зауважимо, що значення степеня $a^r$, де $r$ — раціональне число, не залежить від того, у вигляді якого дробу подано число $r$. Це можна показати, використовуючи рівності $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ і $a^{\frac{mk}{nk}} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Степінь з основою, яка дорівнює нулю, означають тільки для додатного раціонального показника.

**Означення. $0^{\frac{m}{n}} = 0$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.**

Звертаємо увагу, що, наприклад, запис $0^{-\frac{1}{2}}$ не має змісту.

Наголосимо, що в означеннях не йдеться про степінь $a^{\frac{m}{n}}$ для $a < 0$, наприклад, вираз $(-2)^{\frac{1}{3}}$ залишився невизначеним. Разом з тим вираз $\sqrt[3]{-2}$ має зміст. Виникає природне запитання: чому б не вважати, що $\sqrt[3]{-2} = (-2)^{\frac{1}{3}}$? Покажемо, що така домовленість призвела б до суперечності:

$$\sqrt[3]{-2} = (-2)^{\frac{1}{3}} = (-2)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-2)^2} = \sqrt[6]{4}.$$

Отримали, що від'ємне число $\sqrt[3]{-2}$ дорівнює додатному числу $\sqrt[6]{4}$.

Функцію, яку можна задати формулою $y = x^r$, $r \in \mathbb{Q}$, називають **степеневою функцією з раціональним показником.**

Якщо нескоротний дріб $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, є додатним числом, то областю визначення функції $y = x^{\frac{m}{n}}$ є проміжок $[0; +\infty)$; а якщо цей дріб — від'ємне число, то проміжок $(0; +\infty)$.

Функція $y = x^{\frac{1}{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$, нічим не відрізняється від функції $y = \sqrt[2k]{x}$. Функції $y = x^{\frac{1}{2k+1}}$ і $y = \sqrt[2k+1]{x}$, $k \in \mathbb{N}$, мають різні області визначення. Так, на проміжку $[0; +\infty)$ обидві ці функції збігаються, але на проміжку $(-\infty; 0)$ визначена лише функція $y = \sqrt[2k+1]{x}$.

На рисунку 6.1 зображено графіки функцій $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{\frac{1}{3}}$, $y = x^{\frac{1}{4}}$.

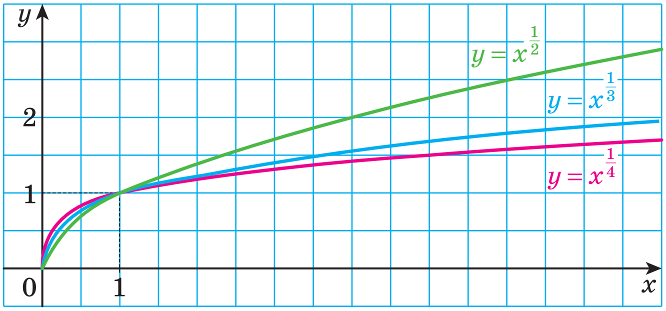



**Рис. 6.1**

Покажемо, що властивості степеня із цілим показником залишаються справедливими й для степеня з довільним раціональним показником.

**Теорема 6.1 (добуток степенів).** ***Для будь-якого $a > 0$ і будь-яких раціональних чисел $p$ і $q$ виконується рівність***

$$\boxed{a^p \cdot a^q = a^{p+q}}$$

*Доведення.* Запишемо раціональні числа $p$ і $q$ у вигляді дробів з однаковими знаменниками: $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Маємо: $a^p \cdot a^q = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a^m \cdot a^k} =$

$$= \sqrt[n]{a^{m+k}} = a^{\frac{m+k}{n}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{n}} = a^{p+q}. ◄$$

**Наслідок.** ***Для будь-якого $a > 0$ і будь-якого раціонального числа $p$ виконується рівність***

$$\boxed{a^{-p} = \frac{1}{a^p}}$$

*Доведення.* Застосовуючи теорему 6.1, запишемо: $a^{-p} \cdot a^p = a^{-p+p} = a^0 = 1$. Звідси $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$. ◄

**Теорема 6.2 (частка степенів).** ***Для будь-якого $a > 0$ та будь-яких раціональних чисел $p$ і $q$ виконується рівність***

$$\boxed{a^p : a^q = a^{p-q}}$$

*Доведення.* Застосовуючи теорему 6.1, запишемо: $a^q \cdot a^{p-q} = a^{q+p-q} = a^p$. Звідси $a^{p-q} = a^p : a^q$. ◄

**Теорема 6.3 (степінь степеня).** ***Для будь-якого $a > 0$ та будь-яких раціональних чисел $p$ і $q$ виконується рівність***

$$\boxed{(a^p)^q = a^{pq}}$$

*Доведення.* Нехай $p = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, і $q = \frac{s}{k}$, $s \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Маємо: $(a^p)^q = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{s}{k}} = \sqrt[k]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^s} = \sqrt[k]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^s} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a^{ms}}} =$

$$= \sqrt[kn]{a^{ms}} = a^{\frac{ms}{kn}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{s}{k}} = a^{pq}. ◄$$

**Теорема 6.4 (степінь добутку і степінь частки).** ***Для будь-яких $a > 0$ і $b > 0$ та будь-якого раціонального числа $p$ виконуються рівності:***

$$\boxed{(ab)^p = a^p b^p}$$

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}}$$

Доведіть цю теорему самостійно.

**ПРИКЛАД 1** Побудуйте графік функції $f(x)=\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^{-3}$.

*Розв'язання.* Областю визначення функції $f$ є множина $(0;\ +\infty)$. Дану функцію можна задати такими умовами: $f(x)=x$, $D(f)=(0;\ +\infty)$. Графік функції зображено на рисунку 6.2. ◄

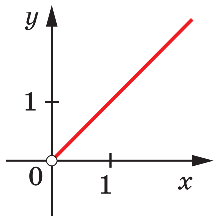



**Рис. 6.2**

Розглянемо приклади, у яких виконуються тотожні перетворення виразів, що містять степені з раціональним показником.

**ПРИКЛАД 2** Скоротіть дріб: 1) $\dfrac{b^{\frac{5}{6}}+3b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{2}{3}}-9c^{\frac{1}{2}}}$; 2) $\dfrac{32^{\frac{1}{3}}-16^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}}}$.

*Розв'язання.* 1) Розклавши чисельник і знаменник дробу на множники, отримуємо:

$$\frac{b^{\frac{5}{6}}+3b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{2}{3}}-9c^{\frac{1}{2}}}=\frac{b^{\frac{1}{2}}\left(b^{\frac{1}{3}}+3c^{\frac{1}{4}}\right)}{\left(b^{\frac{1}{3}}-3c^{\frac{1}{4}}\right)\left(b^{\frac{1}{3}}+3c^{\frac{1}{4}}\right)}=\frac{b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}}-3c^{\frac{1}{4}}}.$$

2) Маємо: $\dfrac{32^{\frac{1}{3}}-16^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{16^{\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{1}{3}}-1\right)}{2^{\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{1}{3}}-1\right)}=\dfrac{16^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}=\left(\dfrac{16}{2}\right)^{\frac{1}{3}}=8^{\frac{1}{3}}=2.$ ◄

## ВПРАВИ

**6.1.°** Знайдіть значення виразу:

1) $4^{\frac{1}{2}}$; 2) $0{,}216^{-\frac{1}{3}}$; 3) $27^{\frac{4}{3}}$; 4) $32^{-0{,}2}$.

**6.2.°** Чому дорівнює значення виразу:

1) $8^{\frac{1}{3}}$; 2) $10\,000^{\frac{1}{4}}$; 3) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$; 4) $0{,}125^{-\frac{2}{3}}$?

**6.3.°** Знайдіть область визначення функції:

1) $y=x^{\frac{5}{6}}$; 2) $y=(x-3)^{2{,}6}$; 3) $y=(x^2-6x-7)^{-\frac{1}{9}}$.

**6.4.°** Знайдіть область визначення функції:

1) $y=x^{-\frac{2}{3}}$; 2) $y=(x+1)^{-\frac{7}{12}}$; 3) $y=(x^2-x-30)^{\frac{4}{15}}$.

**6.5.°** Знайдіть значення виразу:

1) $\left(\frac{1}{49}\right)^{-1,5}$; 2) $8^{\frac{1}{2}} : 2^{\frac{1}{2}}$; 3) $36^{0,4} \cdot 6^{1,2}$; 4) $\left(4^{-\frac{1}{8}}\right)^{1,6} \cdot 16^{0,6}$.

**6.6.°** Чому дорівнює значення виразу:

1) $5^{3,4} \cdot 5^{-1,8} \cdot 5^{-2,6}$; 2) $(7^{-0,7})^8 : 7^{-7,6}$; 3) $\left(9^{\frac{3}{7}}\right)^{4\frac{2}{3}}$; 4) $\left(2\frac{6}{7}\right)^{2,5} \cdot 1,4^{2,5}$?

**6.7.°** Відомо, що $a$ — додатне число. Подайте $a$ у вигляді: 1) куба; 2) восьмого степеня.

**6.8.°** Відомо, що $b$ — додатне число. Подайте у вигляді куба вираз:

1) $b^{\frac{1}{2}}$; 2) $b^{\frac{1}{3}}$; 3) $b^{-1,8}$; 4) $b^{\frac{7}{11}}$.

**6.9.°** Розкрийте дужки:

1) $(a^{0,5} - 3b^{0,3})(2a^{0,5} + b^{0,3})$;

2) $\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)^2$;

3) $(b^{0,4} + 3)^2 - 6b^{0,4}$;

4) $\left(a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{5}{6}} + a\right)$;

5) $\left(a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)$;

6) $\left(x^{\frac{2}{9}} - 1\right)\left(x^{\frac{4}{9}} + x^{\frac{2}{9}} + 1\right)\left(x^{\frac{2}{3}} + 1\right)$.

**6.10.°** Розкрийте дужки:

1) $\left(a^{\frac{1}{3}} - 5b^{-\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}} + 5b^{-\frac{1}{4}}\right)$;

2) $\left(b^{\frac{4}{3}} - b^{-\frac{2}{3}}\right)^2$;

3) $\left(x^{\frac{1}{6}} + 2\right)\left(x^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{6}} + 4\right)$;

4) $\left(a^{\frac{1}{8}} - 1\right)\left(a^{\frac{1}{4}} + 1\right)\left(a^{\frac{1}{8}} + 1\right)$.

**6.11.°** Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{a - 4b}{a^{0,5} + 2b^{0,5}}$;

2) $\dfrac{a - b}{ab^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}b}$;

3) $\dfrac{4c^{\frac{2}{3}} - 12c^{\frac{1}{3}}d^{\frac{1}{3}} + 9d^{\frac{2}{3}}}{2c^{\frac{1}{3}} - 3d^{\frac{1}{3}}}$;

4) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{3}{2}} - n^{\frac{3}{2}}}$;

5) $\dfrac{a^{\frac{3}{4}} + 7a^{\frac{1}{2}}}{a - 49a^{\frac{1}{2}}}$;

6) $\dfrac{30^{\frac{1}{5}} - 6^{\frac{1}{5}}}{10^{\frac{1}{5}} - 2^{\frac{1}{5}}}$.

**6.12.°** Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{a + 2a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + 2}$;

2) $\dfrac{a - b^2}{a - a^{\frac{1}{2}}b}$;

3) $\dfrac{x^{3,5}y^{2,5} - x^{2,5}y^{3,5}}{x + 2x^{0,5}y^{0,5} + y}$;

4) $\dfrac{a - 125}{a^{\frac{2}{3}} - 25}$;

5) $\dfrac{m^{\frac{7}{6}} - 36m^{\frac{5}{6}}}{m^{\frac{1}{2}} - 6m^{\frac{1}{3}}}$;

6) $\dfrac{24^{\frac{1}{4}} - 8^{\frac{1}{4}}}{6^{\frac{1}{4}} - 2^{\frac{1}{4}}}$.

# ЗМІСТ

*Від авторів* ........ 3
*Умовні позначення* ........ 4

**§ 1. Повторення й систематизація навчального матеріалу з курсу алгебри 8–9 класів** ........ 5
1. Задачі на повторення курсу алгебри 8–9 класів ........ 5

**§ 2. Степенева функція** ........ 16
2. Степенева функція з натуральним і цілим показником ........ 16
• Функціональний підхід Коші ........ 25
3. Обернена функція ........ 28
• Львівська математична школа ........ 37
4. Означення кореня $n$-го степеня. Функція $y = \sqrt[n]{x}$ ........ 39
5. Властивості кореня $n$-го степеня ........ 48
6. Степінь з раціональним показником та його властивості ........ 55
7. Ірраціональні рівняння ........ 62
8. Різні прийоми розв'язування ірраціональних рівнянь та їхніх систем ........ 71
9. Ірраціональні нерівності ........ 76

**§ 3. Тригонометричні функції** ........ 81
10. Радіанна міра кута ........ 81
11. Тригонометричні функції числового аргументу ........ 88
• Ставай Остроградським! ........ 95
12. Знаки значень тригонометричних функцій ........ 96
13. Періодичні функції ........ 99
• Про суму періодичних функцій ........ 109
14. Властивості та графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ ........ 111
15. Властивості та графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ ........ 120
16. Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу ........ 125
17. Формули додавання ........ 132
18. Формули зведення ........ 141
19. Формули подвійного, потрійного та половинного кутів ........ 148
20. Формули для перетворення суми, різниці та добутку тригонометричних функцій ........ 162

**§ 4. Тригонометричні рівняння і нерівності** ........ 169
21. Рівняння $\cos x = b$ ........ 169
22. Рівняння $\sin x = b$ ........ 176
23. Рівняння $\operatorname{tg} x = b$ і $\operatorname{ctg} x = b$ ........ 183
24. Функції $y = \arccos x$ і $y = \arcsin x$ ........ 188
25. Функції $y = \operatorname{arctg} x$ і $y = \operatorname{arcctg} x$ ........ 198
26. Тригонометричні рівняння, які зводяться до алгебраїчних ........ 206

27. Розв'язування тригонометричних рівнянь методом розкладання на множники ........ 216
28. Приклади розв'язування більш складних тригонометричних рівнянь ........ 220
29. Про рівносильні переходи під час розв'язування тригонометричних рівнянь ........ 225
30. Тригонометричні нерівності ........ 231
31. ● Тригонометрична підстановка ........ 239

**§ 5. Числові послідовності** ........ 244

32. Числові послідовності ........ 244
33. Границя числової послідовності ........ 251
34. Теореми про арифметичні дії зі збіжними послідовностями ........ 258
● Доведення теорем про арифметичні дії зі збіжними послідовностями ........ 262
35. Властивості збіжних послідовностей ........ 266
● Число Ейлера ........ 281

**§ 6. Границя та неперервність функції** ........ 285

37. Границя функції в точці ........ 285
● Означення границі функції в точці за Коші ........ 295
38. Теореми про арифметичні дії з границями функцій у точці ........ 298
39. Неперервність функції в точці ........ 303
40. Деякі властивості неперервних функцій ........ 314
● Доведення першої теореми Больцано—Коші ........ 320
● Доведення першої теореми Вейєрштрасса ........ 321
41. Перша чудова границя ........ 322
42. Асимптоти графіка функції ........ 327

**§ 7. Похідна та її застосування** ........ 337

43. Приріст функції. Задачі, які приводять до поняття похідної ........ 337
44. Поняття похідної ........ 345
45. Правила обчислення похідних ........ 360
● Доведення теорем про похідні складеної та оберненої функцій ........ 373
46. Рівняння дотичної ........ 376
47. Теореми Ферма, Ролля, Лагранжа ........ 383
48. Ознаки зростання і спадання функції ........ 391
49. Точки екстремуму функції ........ 403
50. Найбільше і найменше значення функції на відрізку ........ 416
51. Друга похідна. Поняття опуклості функції ........ 424
● Нерівність Єнсена ........ 435
52. Побудова графіків функцій ........ 438

*Відповіді та вказівки до вправ* ........ 444

*Предметний покажчик* ........ 508